目　录

第一章　拓扑空间

本章介绍拓扑空间、开集、闭集、连续映射和同胚映射等基本概念，并且还叙述了可数性、分离性、连通性、列紧性、紧致性等拓扑性质。而将 Euclid 空间和度量空间作为拓扑空间的重要例子。这些内容是学习流形和Stokes 定理所必备的知识。

§1　度量空间(X,ρ)

1. 内积空间$(X,\langle,\rangle)$和模空间$(X,\|\ \|)$

定义 1　设X是一个向量空间，$X\times X=\{(x,y)\,|\,x,y\in X\}$。如果映射

$$g=\langle,\rangle:\ X\times X\to R(\text{实数全体}),$$
$$(x,y)\to g(x,y)=\langle x,y\rangle$$

满足：

(1°) $\langle x,x\rangle\geqslant 0$，$\langle x,x\rangle=0\Longleftrightarrow x=0$ (正定性)①；

(2°) $\langle x,y\rangle=\langle y,x\rangle$ (对称性)；

(3°) $\langle x_1+x_2,y\rangle=\langle x_1,\ y\rangle+\langle x_2,y\rangle$，

$\langle\lambda x,y\rangle=\lambda\langle x,y\rangle$，$x$，$x_1,x_2,y\in X$，$\lambda\in R$ (线性性)。

则称$(X,\langle,\rangle)$为内积空间，$g=\langle,\rangle$为X上的一个内积。

注　显然从(2°)，(3°)可推出：

$$\langle x,y_1+y_2\rangle=\langle x,y_1\rangle+\langle x,y_2\rangle,$$
$$\langle x,\lambda y\rangle=\lambda\langle x,y\rangle,x,y,y_1,y_2\in X,\lambda\in R.$$

---

① 符号“$\Longleftrightarrow$”表示充分必要条件。
“$\Longrightarrow$”表示必要性。
“$\Longleftarrow$”表示充分性。

因此$\langle,\rangle$是双线性的(或是偏线性的).

定义 2 设X是一个向量空间,如果映射

$$\|\ \ \|: X\to R,$$
$$x\to\|x\|$$

满足:

(1°) $\|x\|\geqslant 0$, $\|x\|=0\Longleftrightarrow x=0$;

(2°) $\|\lambda x\|=|\lambda|\cdot\|x\|$, $x\in X,\lambda\in R$;

(3°) $\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$, $x,y\in X$.

则称$(X,\|\ \ \|)$为模空间(或赋范空间),$\|\ \ \|$为X上的一个模(或范数).

定理 1(Schwarz 不等式). 设$(X,\langle,\rangle)$是内积空间,$\|x\|=\langle x,x\rangle^{\frac{1}{2}}(x\in X)$,则有

$$|\langle x,y\rangle|\leqslant\|x\|\cdot\|y\|,$$

等号当且仅当$y=\lambda x$或$x=\lambda y$时才成立.

证明:(1°)当$x=0$(或$y=0$)时,由定义1中的(3°)得到

$$\langle 0,y\rangle=\langle 0+0,y\rangle=\langle 0,y\rangle+\langle 0,y\rangle,$$
$$\langle 0,y\rangle=0,$$

再由定义1中的(1°)可看出定理的不等式显然成立.

当$x\neq 0,y\neq 0$时,在

$$\langle x,x\rangle-2\langle x,y\rangle\lambda+\langle y,y\rangle\lambda^2=\langle x-\lambda y,x-\lambda y\rangle\geqslant 0 \qquad (1)$$

中令$\lambda=\langle x,x\rangle^{\frac{1}{2}}/\langle y,y\rangle^{\frac{1}{2}}$,就有

$$\langle x,y\rangle\leqslant\|x\|\cdot\|y\|.$$

再用$-y$代替y得到

$$-\langle x,y\rangle=\langle x,-y\rangle\leqslant\|x\|\cdot\|-y\|=\|x\|\cdot\|y\|,$$

所以

$$|\langle x,y\rangle|\leqslant\|x\|\cdot\|y\|.$$

(2°) 如果$y=\lambda x$(或$x=\lambda y$)则

$|\langle x,y\rangle| = |\langle x,\lambda x\rangle| = |\lambda|\cdot|\langle x,x\rangle| = \|x\|\cdot\|\lambda x\| = \|x\|\cdot\|y\|$.
反之，若$|\langle x,y\rangle| = \|x\|\cdot\|y\|$.

情形 1　$y=0$，则 $y=0\cdot x$.

情形 2　$y\neq 0$，由于(1)中关于 λ 的二次三项式的判别式

$$\Delta = 4\langle x,y\rangle^2 - 4\langle x,x\rangle\langle y,y\rangle = 0,$$

故必有实数 λ，使得

$$\langle x-\lambda y, x-\lambda y\rangle = \langle x,x\rangle - 2\langle x,y\rangle\lambda + \langle y,y\rangle\lambda^2 = 0,$$

由定义 1 中的(1°)推出

$$x = \lambda y. \quad \#$$

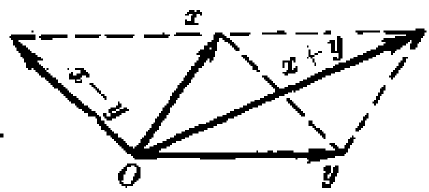


图 1

定理 2　设$(X,\langle,\rangle)$是内积空间，令

$$\|\ \|: X\to R,$$

$$x\to\|x\| = \langle x,x\rangle^{\frac{1}{2}},$$

则$(X,\|\ \|)$是由$(X,\langle,\rangle)$导出的一个模空间.

证明　定义 2 中的条件 (1°) 和 (2°) 是显然的. 而 (3°) 从 Schwarz 不等式推出：

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \|x\|^2 + 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2 \leqslant \|x\|^2 + $$
$$+ 2\|x\|\cdot\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\|+\|y\|)^2. \quad \#$$

定理 3　设$(X,\|\ \|)$是向量空间 X 上的模空间. 则$(X,\|\ \|)$可由 X 的某个内积空间$(X,\langle,\rangle)$ 导出$\Longleftrightarrow(X,\|\ \|)$的模$\|\ \|$满足平行四边形法则(参看图 1)：

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

证明　$(\Rightarrow)$　$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle$

$$+\langle x-y, x-y\rangle = (\langle x,x\rangle + 2\langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle)$$
$$+(\langle x,x\rangle - 2\langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle) = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

$(\Leftarrow)$　令$\langle x,y\rangle = \dfrac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2)$.

(1°) 特别当 $y=x$ 时，$\langle x,x\rangle = \|x\|^2$，因此由定义 2 中的条件(1°)推出定义 1 中的条件(1°).

(2°) $\langle x,y\rangle=\frac{1}{4}(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2)=\frac{1}{4}(\|y+x\|^2-\|y-x\|^2)=\langle y,x\rangle$.

(3°)
$$\begin{aligned}\langle x,z\rangle+\langle y,z\rangle&=\frac{1}{4}(\|x+z\|^2-\|x-z\|^2)\\&+\frac{1}{4}(\|y+z\|^2-\|y-z\|^2)\\&=\frac{1}{8}(2\|x+z\|^2+2\|y+z\|^2)\\&-\frac{1}{8}(2\|x-z\|^2+2\|y-z\|^2)\\&=\frac{1}{8}(\|x+y+2z\|^2+\|x-y\|^2)\\&-\frac{1}{8}(\|x+y-2z\|^2+\|x-y\|^2)\\&=\frac{1}{2}\langle x+y,2z\rangle,\end{aligned}$$

特别地当 $y=0$ 时，有

$$\langle 0,z\rangle=\frac{1}{4}(\|0+z\|^2-\|0-z\|^2)=0,$$

$$\langle x,z\rangle=\langle x,z\rangle+\langle 0,z\rangle=\frac{1}{2}\langle x+0,2z\rangle=\frac{1}{2}\langle x,2z\rangle,$$

于是

$$\langle x,z\rangle+\langle y,z\rangle=\frac{1}{2}\langle x+y,2z\rangle=\langle x+y,z\rangle.$$

由上式可以得到

$$\langle x,y\rangle+\langle -x,y\rangle=\langle x-x,y\rangle=\langle 0,y\rangle=0,$$
$$\langle -x,y\rangle=-\langle x,y\rangle,$$
$$2\langle x,y\rangle=\langle x+x,y\rangle=\langle 2x,y\rangle,$$
$$n\langle x,y\rangle=\langle nx,y\rangle,$$

$$n\left\langle \frac{m}{n}x, y \right\rangle = \left\langle n\cdot\frac{m}{n}x, y \right\rangle = \langle mx, y\rangle = m\langle x, y\rangle,$$

$$\frac{m}{n}\langle x, y\rangle = \left\langle \frac{m}{n}x, y \right\rangle \quad (m=0,1,2,\cdots; n=1,2,\cdots).$$

因此，当 λ 是有理数时有 $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$。

最后，当 λ 为任何实数时，取有理数 $\lambda_n \to \lambda (n\to+\infty)$，则有

$$\langle \lambda x, y\rangle = \lim_{n\to+\infty}\langle \lambda_n x, y\rangle = \lim_{n\to+\infty}\lambda_n\langle x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$$

（其中第一个等式留作习题）。 #

2. 度量（距离）空间 (X, ρ)

定义 3 设 X 是一个集合，如果映射

$$\rho: X\times X \to R,$$
$$(x, y) \to \rho(x, y)$$

满足：

(1°) $\rho(x, y)\geqslant 0$，$\rho(x, y)=0 \Longleftrightarrow x=y$；

(2°) $\rho(x, y)=\rho(y, x)$ （对称性）；

(3°) $\rho(x, z)\leqslant \rho(x, y)+\rho(y, z)$ （三角形不等式）。

则称 (X, ρ) 为**度量（或距离）空间**，ρ 称为 X 上的**度量（或距离）函数**。$\rho(x, y)$ 称为点 x 和 y 之间的**距离**。

定理 4 设 $(X, \|\ \|)$ 是模空间，令

$$\rho: X\times X\to R,$$
$$(x, y)\to \rho(x, y)=\|x-y\|,$$

则 (X, ρ) 是一个度量空间。

证明 (1°) 显然 $\rho(x, y)=\|x-y\|\geqslant 0$，且

$$\rho(x, y)=\|x-y\|=0 \Longleftrightarrow x-y=0 \Longleftrightarrow x=y.$$

(2°) $\rho(x, y)=\|x-y\|=\|y-x\|=\rho(y, x)$.

(3°) $\rho(x, z)=\|x-z\|\leqslant\|x-y\|+\|y-z\|$

$$=\rho(x, y)+\rho(y, z). \qquad \#$$

注 如果给出了内积空间$(X,\langle,\rangle)$，由它可诱导出模空间$(X,\|\ \ \|)$和度量空间(X,ρ)。

3. 完备度量空间和压缩映象原理

定义 4 设(X,ρ)为度量空间，$x_n, x\in X$，如果

$$\lim_{n\to+\infty}\rho(x_n,x)=0,$$

换句话说，任给$\varepsilon>0$，存在N（自然数），当$n>N$时，有

$$\rho(x_n,x)<\varepsilon,$$

则称点列$\{x_n\}=\{x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots\}$**收敛**于$x$，记为

$$\lim_{n\to+\infty}x_n=x(\text{或 } x_n\to x(n\to+\infty)),$$

而x称为$\{x_n\}$的**极限点**。

定义 5 设(X,ρ)为度量空间，$x_n\in X$，如果对任何$\varepsilon>0$，存在N（自然数），当$n,m>N$时，有

$$\rho(x_n,x_m)<\varepsilon,$$

则称点列$\{x_n\}$为**Cauchy 点列或基本点列**。

如果X中的所有 Cauchy 点列都收敛，则称(X,ρ)为**完备度量空间**。

定理 5 收敛点列必为 Cauchy 点列，但反之不真。

证明 设$\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=x$。任给$\varepsilon>0$，存在$N$，当$n>N$时，$\rho(x_n,x)<\frac{\varepsilon}{2}$。则当$n,m>N$时，有

$$\rho(x_n,x_m)\leqslant\rho(x_n,x)+\rho(x_m,x)<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

这就证明了$\{x_n\}$是 Cauchy 点列。

反之不真可参看例 3。 #

定义 6 设(X,ρ)为度量空间，

$$f:\ X\to X$$

是一个映射，如果存在数c，$0<c<1$，使得对所有$x,y\in X$，有

$$\rho(f(x),f(y))\leqslant c\rho(x,y),$$

则称 f 为 X 到 X 的一个**压缩映射**.

定理 6(压缩映象原理) 设 (X,ρ) 为完备度量空间, f 是 X 到 X 的压缩映射, 则必存在 f 的唯一的一个**不动点** $x\in X$, 即 $f(x)=x$.

证明 (存在性) 任取 $x_0\in X$, 并递推定义 $\{x_n\}$:

$$x_{n+1}=f(x_n),\quad n=0,1,2,\cdots.$$

选择 c, $0<c<1$, 使 $\rho(f(x),f(y))\leqslant c\rho(x,y)$. 则我们有

$$\rho(x_{n+1},x_n)=\rho(f(x_n),\ f(x_{n-1}))\leqslant c\rho(x_n,x_{n-1}).$$

因此, 由归纳法可得

$$\rho(x_{n+1},x_n)\leqslant c^n\rho(x_1,x_0)\quad(n=0,1,2,\cdots).$$

如果 $n<m$, 我们得到

$$\rho(x_n,x_m)\leqslant\sum_{i=n+1}^{m}\rho(x_i,\ x_{i-1})\leqslant\sum_{i=n+1}^{m}c^{i-1}\rho(x_1,x_0)$$

$$\leqslant\frac{c^n}{1-c}\rho(x_1,x_0).$$

所以 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 点列. 因为 (X,ρ) 是完备的, 所以存在 $x\in X$, 使得 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=x$.

由于 f 是压缩映射, f 是连续的(事实上是一致连续的. 它们的定义与数学分析中定义相类似), 因此,

$$f(x)=\lim_{n\to+\infty}f(x_n)=\lim_{n\to+\infty}x_{n+1}=x.$$

(唯一性) 如果 $f(x)=x$, $f(y)=y$, 则

$$\rho(x,y)=\rho(f(x),f(y))\leqslant c\rho(x,y),$$

$$0\leqslant(1-c)\rho(x,y)\leqslant 0,$$

$$\rho(x,y)=0,\text{即 } x=y.\qquad \#$$

4. 具体例子

例 1 设 (X,ρ) 为度量空间, $A\subset X$, 如果令 $\rho_A=\rho|_{A\times A}$, 即

$$\rho_A:\ A\times A\to R,$$

$$(x,y)\to\rho_A(x,y)=\rho(x,y).$$

显然，(A,ρ_A) 也是度量空间，称为(X,ρ) 的**子度量空间**，有时仍将ρ_A 记为 ρ.

例 2 设(X_1,ρ_1)和$(X_2,\ \rho_2)$都是度量空间．令

$$X_1\times X_2=\{(x_1,x_2)\mid x_1\in X_1,\ x_2\in X_2\},$$

$$\rho:\ (X_1\times X_2)\times(X_1\times X_2)\to R,$$

$$((x_1,x_2),(y_1,y_2))\to\rho((x_1,x_2),(y_1,y_2))$$

$$=[\rho_1^2(x_1,y_1)+\rho_2^2(x_2,y_2)]^{\frac{1}{2}}.$$

容易验证$(X_1\times X_2,\rho)$也是一个度量空间，称为(X_1,ρ_1)与(X_2,ρ_2)的**积度量空间**，记作$(X_1\times X_2,\rho_1\times\rho_2)$。类似地可以得到$(X_1\times\cdots\times X_n,\rho_1\times\cdots\times\rho_n)$。

例 3 n 维 Euclid 空间

$$R^n=\{x=(x_1,\cdots,x_n)\mid x_i\in R\},$$

$$\langle x,y\rangle=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i,$$

$$\|x\|=\left[\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right]^{\frac{1}{2}},$$

$$\rho(x,y)=\|x-y\|=\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

特别当 $n=1$ 时，$\rho(x,y)=|x-y|$（模即绝对值）．容易验证$(R^n,\langle,\rangle)$是内积空间．(R^n,ρ)是完备的．

R^2 中的子集 $R^2-\{0\}$作为 R^2 的子度量空间不是完备的．

§1 习 题

1．证明定理 3 中的$\langle\lambda x,y\rangle=\lim\limits_{n\to+\infty}\langle\lambda_n x,y\rangle$．

2．(1°) 验证例 1 中的(A,ρ_A)是度量空间．

(2°) 验证例 2 中的$(X_1\times X_2,\rho)=(X_1\times X_2,\rho_1\times\rho_2)$是度量空间.

(3°) 验证例 3 中的$(R^n,\langle,\rangle)$是内积空间和(R^n,ρ)是完备的，并验证$R^2-\{0\}$作为R^2的子度量空间不是完备的。

3. 设X是任意集合，令

$$\rho: X\times X\to R,$$

$$(x,y)\to\rho(x,y)=\begin{cases}0, & x=y,\\ 1, & x\neq y.\end{cases}$$

则(X,ρ)是一个度量空间，称为离散度量空间.

4. 设(X,ρ)为度量空间。定义

$$\rho_1(x,y)=\frac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)},$$

$$\rho_2(x,y)=\begin{cases}\rho(x,y), & \text{当}\rho(x,y)\leqslant 1,\\ 1 & ,\text{当}\rho(x,y)>1.\end{cases}$$

则(X,ρ_1)和(X,ρ_2)都是度量空间。并且它们都是有界的(即$\rho_i(x,y)\leqslant$常数，$i=1,2$).

5. 完备的内积空间$(X,\langle,\rangle)$称为 Hilbert空间(或广义的 Euclid 空间).

设$X=\left\{x=(x_1,\cdots,x_n,\cdots)\,|\,x_n\in R,\sum\limits_{n=1}^{+\infty}x_n^2<+\infty\right\}$,

$$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots),y=(y_1,y_2,\cdots,y_n,\cdots)\in X.$$

定义

$$\langle x,y\rangle=\sum_{n=1}^{+\infty}x_ny_n,$$

则$(X,\langle,\rangle)$是 Hilbert 空间.

6. 完备的模空间$(X,\|\ \|)$称为 Banach 空间.

显然 Hilbert 空间一定是 Banach 空间.

验证 (1°)例 3 中的$(R^n,\langle,\rangle)$是 Hilbert 空间.

(2°) 设$(R^n,\|\ \|)$, $\|x\|=\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i|$, $\rho(x,y)=\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i-y_i|$，则它是 Banach 空间.

(3°) 设$(R^n, \| \ \|)$，$\|x\| = \max\limits_{1\leq i\leq n}|x_i|$，$\rho'(x,y) = \max\limits_{1\leq i\leq n}\{|x_i - y_i|\}$，则它是Banach 空间。

7．证明，对题 5 中任何 $x, y \in X$，必有一“中点”z，即 z 满足

$$\rho(x,z) = \rho(y,z) = \frac{1}{2}\rho(x,y).$$

但一般度量空间不必有此性质，试用 Euclid 平面的一个子度量空间为例来说明它。

8．一些函数空间：

(1°)（在讨论函数的逼近或一致收敛时用）

设 $X = \{x(t) | x(t)$在$[a,b]$上连续$\}$，对 $x(t), y(t) \in X$，定义

$$\rho(x(t), y(t)) = \max_{a\leq t\leq b}|x(t) - y(t)|.$$

证明 (X, ρ)为度量空间。

(2°)（在变分法与微分方程的稳定性理论中用）

设 $X = \{x(t) | x(t)$在$[a,b]$上 k 次连续可导$\}$，对 $x(t), y(t) \in X$，定义

$$\rho(x(t), y(t)) = \sum_{i=0}^{k} \max_{a\leq t\leq b}|x^{(i)}(t) - y^{(i)}(t)|$$

或定义 $\rho(x(t), y(t)) = \max\limits_{a\leq t\leq b}\{|x(t) - y(t)|, |x'(t) - y'(t)|, \cdots, |x^{(k)}(t) - y^{(k)}(t)|\}$.

证明 (X, ρ)为度量空间。

(3°)（在积分方程中用）

设 $X = \{x(t) | x(t)$在$[a,b]$上连续$\}$，对 $x(t), y(t) \in X$，定义

$$\langle x(t), y(t)\rangle = \int_a^b x(t)y(t)dt,$$

$$\|x(t)\| = \left[\int_a^b x^2(t)dt\right]^{\frac{1}{2}},$$

$$\rho(x(t), y(t)) = \|x(t) - y(t)\| = \left[\int_a^b (x(t) - y(t))^2 dt\right]^{\frac{1}{2}}.$$

证明 $(X, \langle,\rangle)$是内积空间，指出 X 是无限维向量空间，写出相应的 Schwarz 不等式。(X, ρ)是完备度量空间吗?

9．设(X_n, ρ_n) $(n = 1, 2, \cdots)$为度量空间，令直积空间

$$\prod_{n=1}^{+\infty} X_n = \{x=(x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots) \mid x_n \in X_n\},$$

对于 $x=(x_1,\cdots,x_n,\cdots), y=(y_1,\cdots,y_n,\cdots)\in \prod_{n=1}^{+\infty} X_n$，定义

$$\rho(x,y)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^n}\frac{\rho_n(x_n,y_n)}{1+\rho_n(x_n,y_n)}.$$

证明 (1°) $\left(\prod_{n=1}^{+\infty} X_n, \rho\right)$是度量空间，并且是有界的.

(2°) 如果(X_n,ρ_n)都是完备空间，则$\left(\prod_{n=1}^{+\infty} X_n, \rho\right)$也是完备的。

10. 设(X,ρ_X)是有界的度量空间，Y 是任意集合，令

$$X^Y=\{f \mid f: Y\to X \text{ 是映射}\},$$

对$f,g\in X^Y$，定义

$$\rho(f,g)=\sup\{\rho_X(f(y),g(y)) \mid y\in Y\}.$$

证明 (X^Y,ρ)也是有界的度量空间。

11. (1°) 设$X=\{f \mid f$ 在$[0,1]$上连续$\}$，$\|f\|=\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}\{|f(x)|\}$，证明$\|\ \|$不是由一个内积所导出的模。

(2°) 在 R^n 中定义

$$\rho_*(x,y)=\begin{cases}0, & x=y,\\ 1, & x\neq y.\end{cases}$$

证明 (R^n,ρ_*)不是由一个模空间所导出的度量空间。

§ 2 拓扑空间 (X,τ)

1. 拓扑空间(X,τ)

定义 1 设X是集合，$\tau=\{G \mid G\subset X, G$ 具有性质$P\}$是X的子集族，且满足：

(1°) $X, \phi\in\tau$;

(2°) 如果 $G_\alpha \in \tau$，则 $\bigcup_\alpha G_\alpha \in \tau$；

(3°) 如果$G_1, G_2 \in \tau$，则 $G_1 \cap G_2 \in \tau$。

则称(X, τ)为一个**拓扑空间**。τ 称为X上的一个**拓扑**。τ 中的元素G称为(X, τ)或X的**开集**。

容易看出，由(3°)及归纳法可推出：如果 $G_j \in \tau (j=1, \cdots, k)$，则 $\bigcap_{j=1}^{k} G_j \in \tau$。

例 1 设(X, ρ)为度量空间，对任何 $a \in X, \varepsilon > 0$，我们称

$$U(a, \varepsilon) = \{x \mid x \in X, \rho(x, a) < \varepsilon\}$$

为以 a 为中心 ε 为半径的在(X, ρ)中(或 X 中)的一个**球形邻域**。在不致引起混淆时，只说是 a 的一个球形邻域。令

$$\tau = \{G \mid G \subset X, \text{且对任何 } a \in G, \text{存在} U(a, \varepsilon) \subset G\}.$$

容易验证 τ 满足定义 1 中的三个条件。条件(1°)是显然的。如果 $a \in \bigcup_\alpha G_\alpha, G_\alpha \in \tau$，则存在 $\varepsilon > 0$，使得$U(a, \varepsilon) \subset G_{\alpha_0} \subset \bigcup_\alpha G_\alpha$ (参看图 2(一))，因此满足条件(2°)。如果 $a \in G_1 \cap G_2, G_1, G_2 \in \tau$，则存在$\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0, U(a, \varepsilon_1) \subset G_1, U(a, \varepsilon_2) \subset G_2$。若令 $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$，则有$U(a, \varepsilon) \subset U(a, \varepsilon_1) \cap U(a, \varepsilon_2) \subset G_1 \cap G_2$(参看图 2(二))，因

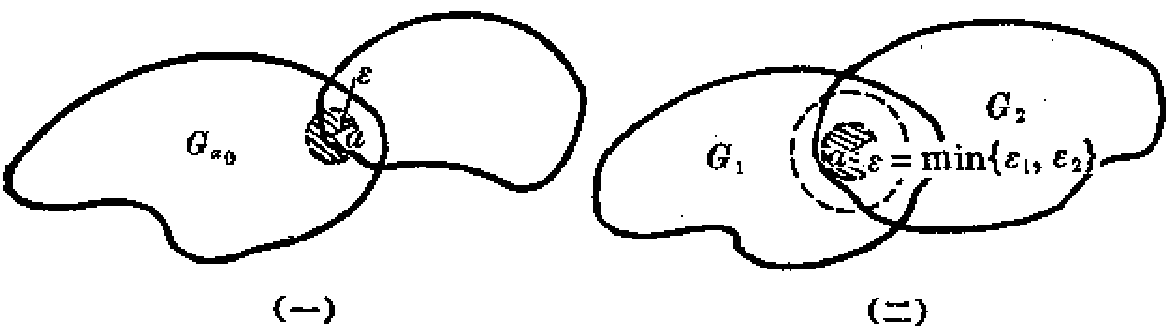


图 2

此满足条件(3°)。这就证明了(X, τ)是一个拓扑空间。今后，我们说度量空间(X, ρ)是一个拓扑空间，指的就是由它导出的

(X,τ).

例 2 设X是非空集合，定义两个最极端的拓扑：

$\tau_{平庸}=\{X,\phi\}$，开集最少，称为**平庸拓扑**。

$\tau_{离散}=\{G \mid 任何G\subset X\}$，开集最多，称为**离散拓扑**。

例 3 设$X=\{a,b,c\}$，

$$\tau=\{X,\{a,b\},\{a,c\},\{a\},\phi\}.$$

因为X中含a的子集的交或併仍含a，由此可验证τ满足定义1中的条件(1°)，(2°)和(3°)。这就推出了(X,τ)是一个拓扑空间。

例 4 设(X,τ)是拓扑空间，$Y\subset X$。令

$$\tau_Y=\{H \mid H=G\cap Y,G\in\tau\}.$$

因为

$$\phi=\phi\cap Y,$$

$$Y=X\cap Y,$$

$$\bigcup_\alpha H_\alpha=\bigcup_\alpha(G_\alpha\cap Y)=\left(\bigcup_\alpha G_\alpha\right)\cap Y,$$

$$H_1\cap H_2=(G_1\cap Y)\cap(G_2\cap Y)=(G_1\cap G_2)\cap Y,$$

所以(Y,τ_Y)是拓扑空间，称为由(X,τ)诱导的**子拓扑空间**或**相对拓扑空间**。

例 5 设 $X=R^1$，

$$\tau=\{G \mid 任何x\in G,存在\ \alpha>x,使[x,\alpha)\subset G\subset X\}.$$

条件(1°)：显然满足。

条件(2°)：任何 $x\in\bigcup_\alpha G_\alpha$，存在 $\beta>x$，使$[x,\beta)\subset G_{\alpha_0}\subset\bigcup_\alpha G_\alpha$。

条件(3°)：任何 $x\in G_1\cap G_2$，存在 $\alpha_1,\alpha_2>x$，使$[x,\alpha_j)\subset G_j(j=1,2)$，则$[x,\min(\alpha_1,\alpha_2))\subset G_1\cap G_2$。因此，$(R^1,\tau)$是一个拓扑空间。

例 6 设$P=\{(x,y)\mid 0<x^2+y^2<1\}$和$Q\subset\{(x,y)\mid x^2+y^2$

$=1\}$是 R^2中的子集，$X=P\cup Q$，$\tau=\{P$ 中关于 R^2 的通常开集或 $P_1\cup Q_1$，其中 $Q_1\subset Q$，P_1为含某个$\{(x,y)|0<x^2+y^2<r^2<1\}$ 的通常开集$\}$，容易验证(X,τ)是拓扑空间。

2. 拓扑基

定义 2 设X是集合，如果子集族 $\tau_*=\{B_\alpha\}$满足：

(1°) $\bigcup\limits_\alpha B_\alpha=X$；

(2°) 若 $x\in B_\alpha\cap B_\beta$，$B_\alpha,B_\beta\in\tau_*$，则存在 $B_\gamma\in\tau_*$，使得 $x\in B_\gamma\subset B_\alpha\cap B_\beta$。则称 τ_*为 X 的一个**拓扑基**。

例 7 (1°)拓扑空间(X,τ)的拓扑 τ 满足定义 2 中的两个条件，因此，它是X的一个拓扑基。

(2°) 设(X,ρ)为度量空间，令

$$\tau_*=\{U(a,r)\,|\,a\in X,r\text{ 为正有理数}\},$$

则 τ_*是X的一个拓扑基。

事实上，定义 2 中的条件 (1°) 是显然的。如果 $x\in U(a_1,r_1)\cap U(a_2,r_2)$，取正有理数 $r\leqslant r_i-\rho(x,a_i)(i=1,2)$。于是，对任何 $y\in U(x,r)$，必有

$$\rho(y,a_i)\leqslant\rho(y,x)+\rho(x,a_i)<r+\rho(x,a_i)$$
$$\leqslant r_i-\rho(x,a_i)+\rho(x,a_i)=r_i\ \ (i=1,2),$$
$$y\in U(a_1,r_1)\cap U(a_2,r_2),$$

即

$$x\in U(x,r)\subset U(a_1,r_1)\cap U(a_2,r_2).$$

(3°) 设(X,ρ)为度量空间，令

$$\tau_*=\{U(a,r)\,|\,a\in X,r\text{ 为正实数}\},$$

类似于(2°)的证明可知 τ_*是X的一个拓扑基。

(4°)在例 5 中，$X=R^1$，取

$$\tau_*=\{[x,a)\,|\,a>x\}.$$

因为 $\bigcup_{n=1}^{+\infty}[-n,n)=R^1$，并且当 $x\in[x_1,a_1)\cap[x_2,a_2)$ 时，必有 $x\in[\max\{x_1,x_2\},\min\{a_1,a_2\})\subset[x_1,a_1)\cap[x_2,a_2)$，所以 τ_* 是 R^1 的一个拓扑基.

定理 1 设 τ_* 是集合 X 的一个拓扑基，令

$\tau=\{G\mid$ 任何 $x\in G$，存在 $B\in\tau_*$，使 $x\in B\subset G\}=\{G\mid G$ 为 τ_* 的若干元素的併集$\}$，则 τ 是 X 的一个拓扑，且 $\tau_*\subset\tau$. 特别地，如果 τ_* 是一个拓扑，则 $\tau_*=\tau$.

(τ 中的每个 G 称为**关于 τ_* 而言的开集**，τ 称为**由拓扑基 τ_* 诱导的拓扑**，而 τ_* 也称为**这拓扑空间 (X,τ) 的一个拓扑基**.)

证明 $\phi\in\tau$ 是显然的. 对任何 $x\in X$，因为 $X=\bigcup_{B_\alpha\in\tau_*}B_\alpha$，所以存在 $B_{\alpha_0}\in\tau_*$，使 $x\in B_{\alpha_0}\subset X$，即 $X\in\tau$. 这就证明了 τ 满足拓扑的条件(1°).

如果 $G_\beta\in\tau$，对任何 $x\in\bigcup_\beta G_\beta$，存在 $G_{\beta_0}\ni x$，所以必有 $B\in\tau_*$，使 $x\in B\subset G_{\beta_0}\subset\bigcup_\beta G_\beta$，即 $\bigcup_\beta G_\beta\in\tau$. 这就证明了 τ 满足拓扑的条件(2°).

此外，如果 $G_1,G_2\in\tau$，$x\in G_1\cap G_2$，则存在 $B_i\in\tau_*$，使得 $x\in B_i\subset G_i(i=1,2)$. 再由 τ_* 的条件(2°)，存在 $B\in\tau_*$，使

$$x\in B\subset B_1\cap B_2\subset G_1\cap G_2,$$

即 $G_1\cap G_2\in\tau$. 这就证明了 τ 具有拓扑的条件(3°). 于是 τ 是 X 的一个拓扑.

显然 $\tau_*\subset\tau$. 特别地，当 τ_* 是 X 的一个拓扑时，由拓扑的条件(2°)得到 $\tau\subset\tau_*$. 因此，$\tau_*=\tau$. #

定义 3 设 τ_* 和 τ_*' 是集合 X 的两个拓扑基，如果它们所诱导的拓扑相同，即 $\tau=\tau'$，则称两个拓扑基是**等价的**，记为 $\tau_*\sim\tau'_*$.

定理 2 设τ_*和τ'_*是X的两个拓扑基，它们所诱导的拓扑分别为τ和τ'. 则

$$\tau_* \sim \tau'_* (\text{即 } \tau=\tau') \Longleftrightarrow \tau_* \subset \tau', \tau'_* \subset \tau.$$

证明($\Rightarrow$) 由定理 1，$\tau_* \subset \tau=\tau'$，$\tau'_* \subset \tau'=\tau$.

($\Leftarrow$) 设$G\in\tau$，则G是τ_*中若干元素的併集，由$\tau_* \subset \tau'$，τ_*中的每个元素是τ'_*中若干元素的併集，因此，G是τ'_*中若干元素的併集，即$G\in\tau'$. 这就推出了$\tau\subset\tau'$. 同理$\tau'\subset\tau$. 于是$\tau=\tau'$. #

§2 习 题

1. 设(X,ρ)是度量空间，$Y\subset X$，由§1例1得到子度量空间(Y,ρ_Y). 再由本节例1，(X,ρ)和(Y,ρ_Y)分别导出了拓扑空间(X,τ)和(Y,τ_Y). 证明：(Y,τ_Y)就是本节例4中所述的由(X,τ)所诱导的子拓扑空间.

2. 设(R^2,ρ)是通常的2维Euclid度量空间. 试分别画出子度量空间(X,ρ_X)和(Y,ρ_Y)的球形邻域$U\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$的图形，这里

$$X=\{(x,y)|(x^2+y^2)^2=x^2-y^2\}\text{是双纽线};$$

$$Y=\{(x,y)|x,y\text{ 为有理数}\}\text{是有理点集}.$$

3. 设(X_1,τ_1)和(X_2,τ_2)是拓扑空间，分别以$\{U_\alpha\}$和$\{V_\beta\}$为拓扑基，则$\{U_\alpha\times V_\beta | U_\alpha\in\tau_1, V_\beta\in\tau_2\}$为$X_1\times X_2$的拓扑基. 记此拓扑基为$\tau_*$，由$\tau_*$诱导的拓扑为$\tau$，称$(X_1\times X_2,\tau)$为$(X_1,\tau_1)$和$(X_2,\tau_2)$的**积拓扑空间**.

证明 τ与诱导τ_1和τ_2的拓扑基$\{U_\alpha\}$，$\{V_\beta\}$的选取无关.

4. 设(X_1,ρ_1)和(X_2,ρ_2)是度量空间，它们分别导出的拓扑空间为(X_1,τ_1)和(X_2,τ_2)，而积度量空间$(X_1\times X_2,\rho_1\times\rho_2)$导出的拓扑空间为$(X_1\times X_2,\tau)$. 证明$(X_1\times X_2,\tau)$就是由$(X_1,\tau_1)$和$(X_2,\tau_2)$诱导的积拓扑空间.

以$R^2=R^1\times R^1$为例，举出R^2中的一个开集$G\overline{\in}\{U_\alpha\times V_\beta\}$.

5. 一个集合的两个度量是拓扑等价的，如果由它们所决定的球形邻域所组成的两个拓扑基是等价的. 证明：

(1°) §1的习题6中所导出的R^n的三种度量是等价的，它们给出的都是Euclid空间的通常拓扑.

(2°) §1的习题4中所叙述的三种度量是等价的.

(3°) 画出§1的习题6中所导出的R^2的三种度量的球形邻域$U(0,1)$的图形.

6. (1°) 证明例2中的离散拓扑空间$(X,\tau_{离散})$能引进一个度量ρ，使得(X,ρ)诱导的拓扑就是$\tau_{离散}$.例如：

$$\rho(x,y)=\begin{cases}0, & x=y,\\ 1, & x\neq y.\end{cases}$$

(2°) 在例2中，如果X多于两点，则平庸拓扑空间$(X,\tau_{平庸})$不能引进度量ρ，使得(X,ρ)诱导的拓扑是$\tau_{平庸}$.

7. 设$\tau=\{U_\alpha\}$与$\tau'=\{U'_\beta\}$是X上的两个拓扑. 定义併集和交集为

$$\tau\cup\tau'=\{U_\alpha,U'_\beta\},$$

$$\tau\cap\tau'=\{V_\gamma\,|\,V_\gamma\in\tau,V_\gamma\in\tau'\}$$

如果对任何$U_\alpha\in\tau$，必有$U_\alpha\in\tau'$(即$\tau\subset\tau'$)，则称拓扑τ小于拓扑τ'，或拓扑τ'大于拓扑τ.

(1°) 证明：集合X上的任意多个拓扑τ_α的交集$\tau=\bigcap\limits_\alpha\tau_\alpha$还是$X$上的一个拓扑，而且$\tau$是$X$上的小于每个拓扑$\tau_\alpha$的唯一的最大拓扑.

(2°) 设集合$X=\{a,b,c\}$. 试作出X上的两个拓扑，使得它们的併集不是X的拓扑.

(3°) 设集合X上有任意多个拓扑τ_α. 试作出X上的一个拓扑$\tau\supset\bigcup\limits_\alpha\tau_\alpha$. 这拓扑$\tau$是否是$X$上的大于每个拓扑$\tau_\alpha$的唯一的最小拓扑?

8. 设(X,τ)为拓扑空间，$\tau_*\subset\tau$，且对任何$G\in\tau$，都有G为τ_*的若干元素的併集，则τ_*为(X,τ)的一个拓扑基.

§3 开集、闭集、聚点、极限点和闭包

1. 开集和闭集

定义 1 设(X,τ)为拓扑空间，$a\in A\subset X$. 如果存在一个开

集 G_a，使得 $a\in G_a\subset A$，则称 a 为 A 的在 X 中的一个**内点**（参看图 3）。A 的在 X 中的内点的全体称为 A 的在 X 中的**内部**，记作 $\mathrm{Int}A$ 或 A° 或 A^i。

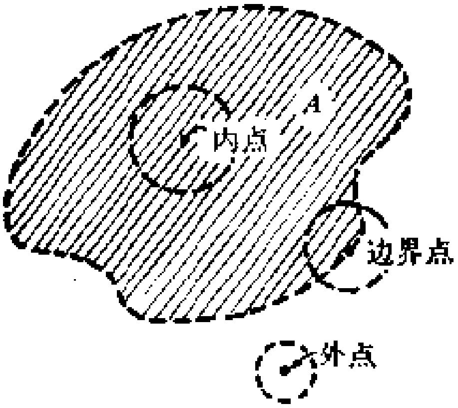


图 3

如果 a 是 $A^c=X-A$（A 在 X 中的余集）的一个内点，则称 a 为 A 的**外点**（参看图 3）。A 的外点的全体称为 A 的**外部**，记作 A^e。

如果 a 既不是 A 的内点，又不是 A 的外点，即 a 的任何邻域（含 a 的开集）必与 A 和 A^c 都相交，则称 a 为 A 的**边界点**（参看图3）。A 的边界点的全体称为 A 的**边界**(boundary)，用 ∂A 或 A^b 来表示。

定理 1 设 (X,τ) 为拓扑空间，$A\subset X$。则

(1°) $A^\circ\subset A$，$A^e=(A^c)^\circ$，$\partial A=\partial(A^c)$。

(2°) A° 是 A 中的关于 X 的最大开集。

(3°) A 是 X 的开集 $\Longleftrightarrow A=A^\circ$。

证明 (1°)由定义 1 显然成立。

(2°) 任何 $a\in A^\circ$，存在开集 G_a，使 $a\in G_a\subset A$，因而 $G_a\subset A^\circ$，$A^\circ=\bigcup\limits_{a\in A^\circ}G_a$ 是开集。

此外，如果 $G\subset A$ 是 X 的开集，则对任何 $a\in G$，取开集 $G_a=G$，于是 $a\in G_a=G\subset A$，$a\in A^\circ$，从而 $G\subset A^\circ$。这就证明了 A° 是 A 中的关于 X 的最大开集。

(3°) ($\Rightarrow$) 因为 A 是 X 的开集，所以 A 是 A 中关于 X 的最大开集，即 $A=A^\circ$。

($\Leftarrow$) 若 $A=A^\circ$，由(2°)它是 X 的开集。#

定义 2 设 (X,τ) 为拓扑空间，$A\subset X$，如果 $A^c=X-A$ 是 X 的开集，则称 A 为 (X,τ)（或 X）的**闭集**。闭集的全体记作 σ。

定理 2 拓扑空间(X,τ)的闭集族σ具有下列三个性质：

(1°) $X,\phi\in\sigma$。

(2°) 如果$F_\alpha\in\sigma$，则$\bigcap\limits_\alpha F_\alpha\in\sigma$。

(3°) 如果$F_1,F_2\in\sigma$，则$F_1\cup F_2\in\sigma$。

由(3°)和归纳法可推出：如果$F_j\in\sigma$ $(j=1,\cdots,n)$，则$\bigcup\limits_{j=1}^{n}F_j\in\sigma$。

反之，设σ是X的一个子集族，且满足上述(1°)，(2°)，(3°)的三个条件．则存在X的唯一的一个拓扑τ，使得拓扑空间(X,τ)的闭集族就是σ。

证明 因为$X^c=X-X=\phi\in\tau$，$\phi^c=X-\phi=X\in\tau$，所以$X,\phi\in\sigma$。

如果$F_\alpha,F_1,F_2\in\sigma$，则$F_\alpha^c,F_1^c,F_2^c\in\tau$。由de Morgan 公式（参看习题第 1 题）和τ的条件(2°)，(3°)得到

$$\left(\bigcap_\alpha F_\alpha\right)^c=\bigcup_\alpha F_\alpha^c\in\tau,\quad \bigcap_\alpha F_\alpha\in\sigma$$

$$(F_1\cup F_2)^c=F_1^c\cap F_2^c\in\tau,F_1\cup F_2\in\sigma.$$

为了证明定理的后半部分，我们令

$$\tau=\{X-F=F^c\mid F\in\sigma\}.$$

从 de Morgan 公式和σ的三个条件，τ是X的一个拓扑．由τ的定义可知，

$$F\in\sigma\Longleftrightarrow F^c=X-F\in\tau.$$

因此，σ是(X,τ)的所有闭集组成的闭集族．此外，要使σ是另一个拓扑空间(X,τ')的所有闭集所组成的闭集族，当且仅当$\tau'=\tau$。

#

例 1 R^n中开集的构造

(1°) 直线R^1中的开集G是至多可数个两两不相交的开区间

的併集.

事实上,对任何 $a\in G$,令

$$\alpha_a=\inf\{\alpha\mid a\in(\alpha,\beta)\subset G\},$$
$$\beta_a=\sup\{\beta\mid a\in(\alpha,\beta)\subset G\},$$

则显然有 $a\in(\alpha_a,\beta_a)$,$\alpha_a,\beta_a\bar{\in}G$. 且$(\alpha_a,\beta_a)$是$G$中含$a$的最大区间(称为$G$的**构成区间**)(参看图4). 不难看出,这种构成区间或者不相交,或者重合. 在G的每个构成区间中取一个有理点与它相对应,显然,不同的构成区间对应着不同的有理点,而有理点的全体是可数的,因此,G的构成区间的全体是至多可数的.

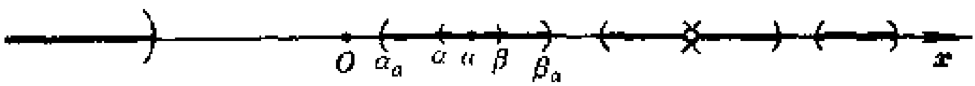


图 4

(2°) 设闭长方体

$$I=\{x=(x_1,\cdots,x_n)\mid a_i\leqslant x_i\leqslant b_i,\ i=1,\cdots,n\},$$

如果 $b_i-a_i=r>0(i=1,\cdots,n)$,则称为**闭立方体**.于是有:$R^n$ 中的开集G是可数个两两无公共内点的闭立方体的併集.

首先,我们将R^n划分成两两无公共内点的边长为1的闭立方体(它的面平行于坐标面)

$$I_1^{(1)},I_2^{(1)},\cdots,I_m^{(1)},\cdots.$$

令

$$J_1^{(1)},\ J_2^{(1)},\cdots,J_m^{(1)},\cdots$$

是包含在G中的那些闭立方体 $I_i^{(1)}$,而

$$K_1{}^{(1)},K_2{}^{(1)},\cdots,K_m{}^{(1)},\cdots$$

是余下的那些闭立方体. 再将

$$K_1^{(1)},K_2^{(1)},\cdots,K_m^{(1)},\cdots$$

划分为边长为$\frac{1}{2}$的两两无公共内点的闭立方体

$$I_1^{(2)}, I_2^{(2)}, \cdots, I_m^{(2)}, \cdots.$$

令

$$J_1^{(2)}, J_2^{(2)}, \cdots, J_m^{(2)}, \cdots$$

是包含在 G 中的那些闭立方体 $I_i^{(2)}$，而

$$K_1^{(2)}, K_2^{(2)}, \cdots, K_m^{(2)}, \cdots$$

是余下的那些闭立方体。

如法炮制，对每个自然数 l，我们得到边长为$\frac{1}{2^{l-1}}$的闭立方体

$$I_1^{(l)}, \cdots, I_m^{(l)}, \cdots; J_1^{(l)}, \cdots, J_m^{(l)}, \cdots; K_1^{(l)}, \cdots, K_m^{(l)}, \cdots.$$

容易看出$\{J_j^{(i)}\}$是可数个两两无公共内点的闭立方体。我们仅须证明它们的并集是G。为此，设 $x \in G$，由 G 是开集，存在球形邻域 $U(x,r) \subset G$。则必有一自然数 l，使得每个边长为$\frac{1}{2^{l-1}}$的包含 x 的闭立方体$\subset U(x,r)$。因此，如果 $x \overline{\in} J_m^{(j)}$，$j<l$，则 $x \in J_m^{(l)}$（某个）（参看图 5）。

2. 聚点、极限点和闭包

定义 3 设(X, τ)是拓扑空间，$A \subset X$，且 $x \in X$。如果 x 的在 X 中的任一邻域 U 都包含 $A-\{x\}$ 的一个点（即 $U \cap (A-\{x\}) \neq \phi$），则称 x 为 A 的在 X 中的一个**聚点**。称 A 的聚点的全体为 A 的**导集**，记为 A'（或 A^d）。而 $\overline{A} = A \cup A'$ 称为 A 的在 X 中的**闭包**。如果 $\overline{A} = X$，则称 A 为 X 的**稠密子集**。

例 2 设 $R^1_{有}=\{x \in R^1 | x$ 为有理点$\}$，$R^1_{无}=\{x \in R^1 | x$ 为无理点$\}$。则 $R^{1\prime}_{有}=R^1$，$\overline{R^1_{有}}=R^1$，$R^{1\prime}_{无}=R^1$，$\overline{R^1_{无}}=R^1$。即 $R^1_{有}$和 $R^1_{无}$都是 R^1 的稠密子集。

例 3 设(X, ρ)是度量空间。

(1°) 如果 $A \subset X$ 是有限子集，则 $A' = \phi$。

(2°) 如果 X 的子集 A 中的任两点的距离都大于一固定的正

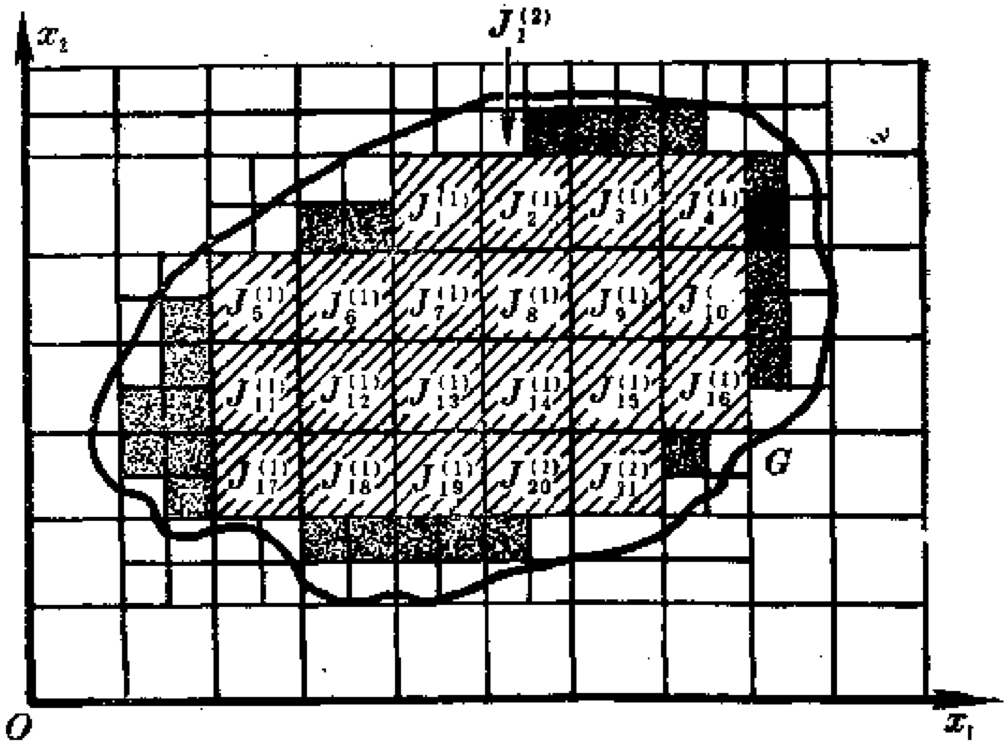


图 5

数 σ，则 $A'=\phi$（留作习题）。

例 4 设 X 是多于两点的集合，$(X,\tau_{平凡})$ 是§2 例 2 中所叙述的拓扑空间，

$$A=\{a,b\,|\,a,b\in X,a\neq b\},$$

则 $A'=X=\overline{A}$，即 A 是 X 的稠密子集（与例 3 比较）。

例 5 设 (X,τ) 为§2 例 6 中的拓扑空间，且

$$A=\left\{(x,y)\,|\,0<x^2+y^2<\frac{1}{4}\right\},$$

则

$$A'=Q\cup\left\{(x,y)\,|\,0<x^2+y^2\leqslant\frac{1}{4}\right\}=\overline{A}.$$

定理 3 设 (X,τ) 是拓扑空间，$A\subset X$，则

(1°) $\overline{A}=A\cup A'=A\cup\partial A$.

(2°) $\overline{A}$ 是包含 A 的最小闭集。

(3°) A 是闭集$\Longleftrightarrow \bar{A}=A$(或 $A'\subset A$)。

证明 (1°)如果 $x\in A'-A$,则 $x\in\partial A$,于是 $A\cup A'=A\cup(A'-A)\subset A\cup\partial A$。如果 $x\in\partial A-A$,则 $x\in A'$,于是 $A\cup\partial A=A\cup(\partial A-A)\subset A\cup A'$。这就证明了

$$A\cup A'=A\cup\partial A.$$

(2°) 如果 $x\in(\bar{A})^c$,则 $x\bar{\in}\bar{A}=A\cup A'$,于是存在 x 的邻域 $U(x)$,使 $U(x)\cap A=\phi$,由此推出 $U(x)\cap(A\cup A')=U(x)\cap\bar{A}=\phi$,即 $U(x)\subset(\bar{A})^c$。这就证明了

$$(\bar{A})^c=\bigcup_{x\in(\bar{A})^c}U(x)$$

是开集(或由$(\bar{A})^c=(A^c)^\circ$可知是开集),即 $\bar{A}$ 是闭集.

此外,如果闭集 $F\supset A$,则对任何 $x\in F^c$(开集),必有 $x\bar{\in}A\cup A'=\bar{A}$,即$\bar{A}\subset F$

综合上述可知 $\bar{A}$ 是包含 A 的最小闭集。

(3°) ($\Leftarrow$) 由(2°)$A=\bar{A}$是闭集。

($\Rightarrow$) 由 (2°)和A是闭集得到 $A\supset\bar{A}\supset A$,即 $\bar{A}=A$。#

定理 4 设(X,τ)为拓扑空间,则闭包具有以下四个性质:

(1°) $\bar{\phi}=\phi$;

(2°) $A\subset\bar{A}$;

(3°) $\bar{\bar{A}}\subset\bar{A}$(由(2°)(3°)推出 $\bar{\bar{A}}=\bar{A}$);

(4°) $\overline{A\cup B}=\bar{A}\cup\bar{B}$.

反之,设X是一个集合,而且给定了子集之间的对应 h^*: $A\to A^*$,且具有四个性质:

(1°) $\phi^*=\phi$;

(2°) $A\subset A^*$;

(3°) $A^{**}\subset A^*$(由(2°)(3°)推出$A^{**}=A^*$);

(4°) $(A\cup B)^*=A^*\cup B^*$.

则存在X的唯一的一个拓扑 τ,使得拓扑空间 (X,τ) 的子集对应

$h: A\to\bar{A}$ 就是给定的 $h^*: A\to A^*$.

证明 从定义 3 立即推出闭包的性质(1°)和(2°).

设 $x\in\bar{\bar{A}}$,则对任何 x 的邻域 $U(x)$ 必包含一点 $y\in\bar{A}$. 于是,对于 y 的邻域 $U(x)$ 必包含一点 $a\in A$, 这就证明了 $x\in\bar{A}$, $\bar{\bar{A}}\subset\bar{A}$, 即闭包的性质(3°).

由 $A\cup B\supset A$ 得到 $\overline{A\cup B}\supset\bar{A}$. 同理 $\overline{A\cup B}\supset\bar{B}$. 所以 $\overline{A\cup B}\supset\bar{A}\cup\bar{B}$. 闭包性质(4°)的另一部分用反证法证明. 设 $x\in\overline{A\cup B}$, 但 $x\bar{\in}\bar{A}\cup\bar{B}$. 则存在 x 的邻域 $U(x)$ 和 $V(x)$, 使得 $U(x)$ 不含 A 的点, $V(x)$ 不含 B 的点, 因而 x 的邻域 $U(x)\cap V(x)$ 不含 $A\cup B$ 的点, 这与 $x\in\overline{A\cup B}$ 矛盾.

反之, 如果给定了满足四个性质的子集之间的对应 h^*, 我们令

$$\sigma=\{F\subset X\mid F^*=F\}.$$

则 σ 具有定理 2 中的三个性质.

由 h^* 的性质(1°), $\phi^*=\phi$ 推出 $\phi\in\sigma$.

由 h^* 的性质(2°), $X\subset X^*\subset X$, 推出 $X^*=X$, 即 $X\in\sigma$.

由 h^* 的性质(4°), 如果 $F_1, F_2\in\sigma$, 则 $(F_1\cup F_2)^*=F_1^*\cup F_2^*=F_1\cup F_2$. 于是

$$F_1\cup F_2\in\sigma.$$

由 h^* 的性质(4°), 如果 $A\subset B$, 则有

$$A^*\subset A^*\cup(B-A)^*=(A\cup(B-A))^*=B^*.$$

设 $F_\alpha\in\sigma$, 即 $F_\alpha^*=F_\alpha$, 则有

$$\left(\bigcap_\alpha F_\alpha\right)^*\subset F_\alpha^*=F_\alpha,\quad \left(\bigcap_\alpha F_\alpha\right)^*\subset\bigcap_\alpha F_\alpha.$$

再由 h^* 的性质(2°)得到

$$\bigcap_\alpha F_\alpha\subset\left(\bigcap_\alpha F_\alpha\right)^*.$$

这就证明了

$$\left(\bigcap_{\alpha} F_{\alpha}\right)^{*}=\bigcap_{\alpha} F_{\alpha},\ 即\bigcap_{\alpha} F_{\alpha}\in\sigma.$$

根据定理 2，存在 X 的唯一的拓扑 τ，使得拓扑空间 (X,τ) 的闭集族恰为 σ。令 (X,τ) 的子集与它的闭包之间的对应为 h：$A\to\overline{A}$。因此，h 具有闭包的四个性质。最后，我们只须证明 $h=h^{*}$，即对任何 $A\subset X$，有 $\overline{A}=A^{*}$。

由 h^{*} 的性质(2°)，有 $A\subset A^{*}$。再根据 h 的性质(4°)推出 $\overline{A}\subset\overline{A^{*}}$。因为 $A^{**}=A^{*}$，所以 $A^{*}\in\sigma$，即 A^{*} 为 (X,τ) 的闭集，$\overline{A^{*}}=A^{*}$。于是 $\overline{A}\subset A^{*}$。

类似地，由 h 的性质(2°)，有 $A\subset\overline{A}$。再根据 h^{*} 的性质(4°)推出 $A^{*}\subset(\overline{A})^{*}$。因为 $\overline{A}$ 是 (X,τ) 的闭集，即 $(\overline{A})^{*}=\overline{A}$。于是 $A^{*}\subset\overline{A}$。因此，$\overline{A}=A^{*}$。 #

定义 4 设 (X,τ) 为拓扑空间，$x_n,x\in X$，如果对于 x 的每个邻域 $U(x)$，存在 N(自然数)，当 $n>N$ 时，有

$$x_n\in U(x),$$

则称点列 $\{x_n\}=\{x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots\}$ **收敛**于 x，记为

$$\lim_{n\to+\infty} x_n=x\ (或\ x_n\to x\ (n\to+\infty)).$$

而 x 称为 $\{x_n\}$ 的**极限点**。

定理 5 设 (X,τ) 为拓扑空间，$A\subset X$ 是闭集，则对 A 中的任何点列 $\{x_n\}$，若

$$\lim_{n\to+\infty} x_n=x,$$

必有 $x\in A$。反之不成立。

证明 设 $x_n\in A$，$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=x$。如果有某个 $x_n=x$，则自然 $x\in A$。如果对一切 n，$x_n\neq x$。则对 x 的任何邻域 $U(x)$，存在 N，当 $n>N$ 时，$x_n\in U(x)$。因此，$x\in A'\subset A$(A 为闭集)。反之不成立可参看例 6。 #

例 6 设 $X=[0,1]=\{x\in R\mid 0\leqslant x\leqslant 1\}$。

$\tau=\{\phi; X-C \mid C$ 是 X 中的至多可数集(ϕ，有限或可数集)$\}$，由 deMorgan 公式可以验证 τ 是一个拓扑，于是 (X,τ) 是一个拓扑空间.

设 A 是 X 的可数子集，对任何 $x\in X$，$U(x)=\{x\}\cup(X-A)$ 是 x 的一个邻域，显然

$$U(x)\cap(A-\{x\})=\phi,$$

因此 A 无聚点. 如果 A 是 X 的不可数子集，对 $x\in X$ 和 x 的任何邻域 $U(x)=X-C$(C 是至多可数集)，则存在

$$y\in A-C-\{x\}, y\in U(x)\cap(A-\{x\}),$$

所以 x 是 A 的聚点. 于是

$$\bar{A}=A'=X.$$

此外，如果 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=x$，则对 x 的邻域

$$\left(X-\bigcup_{i=1}^{+\infty}\{x_i\}\right)\cup\{x\},$$

必有 N，当 $n>N$ 时，

$$x_n\in\left(X-\bigcup_{i=1}^{+\infty}\{x_i\}\right)\cup\{x\}.$$

因此 $x_n=x(n>N)$.

设 $A=X-\{0\}$. 若 $x_n\in A$，$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=x$，则存在 N，当 $n>N$ 时，$x=x_n\in A$，但 A 非闭集($A^c=\{0\}$非开集).

例 7 在例 4 中，取 $x_n=a\in X$，显然$\{x_n\}$以 X 中任何点为极限点.

在例 5 中，取 $x_n=\left(\frac{1}{n},0\right)$，显然$\{x_n\}$以$Q$中任一点为极限点.

定理 6 设(X,ρ)是度量空间，则

(1°) 定义 4 与 §1 定义 4 是等价的.

(2°) 收敛点列$\{x_n\}$的极限点是唯一的.

(3°) 设 $A\subset X$，则 x 是 A 的聚点$\Longleftrightarrow x$ 的任何邻域中必含 A 的无限个点。

$\Longleftrightarrow A-\{x\}$中存在点列$\{x_n\}$，使得 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=x$。

$\Longleftrightarrow A-\{x\}$中存在各项不同的点列$\{y_n\}$，使得 $\lim\limits_{n\to+\infty}y_n=x$。

(4°)设$\{x_n\}$是 X 中的点列，则

$$A=\bigcup_{n=1}^{+\infty}\{x_n\}$$

以 x 为聚点$\Longleftrightarrow\{x_n\}$存在各项不同的子点列$\{x_{n_k}\}$以 x 为极限点。

(5°) $A\subset X$ 为闭集$\Longleftrightarrow A$ 中任何点列$\{x_n\}$，若 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=x$，则 $x\in A$。

证明 我们只证(2°)和(5°)，其余留作习题。

(2°)如果

$$\lim_{n\to+\infty}x_n=x,\qquad \lim_{n\to+\infty}x_n=y,$$

则对任何 $\varepsilon>0$，存在 N，当 $n>N$ 时，有

$$\rho(x_n,x)<\frac{\varepsilon}{2},\qquad \rho(x_n,y)<\frac{\varepsilon}{2},$$

于是

$$0\leqslant\rho(x,y)\leqslant\rho(x,x_n)+\rho(x_n,y)<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

令 $\varepsilon\to0$ 得到 $\rho(x,y)=0$，由 ρ 的条件(1°)推出 $x=y$。

(5°)($\Rightarrow$)由定理 5 即得。

($\Leftarrow$)设 $x\in A'$，由上述(3°)，有 $A-\{x\}$中的点列$\{x_n\}$，使得 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=x$，从题设知 $x\in A$，即 $A'\subset A$，于是A 是闭集。 #

§3 习 题

1．设X是集合，$\{A_\alpha\}$为X的子集族。证明 deMorgan 公式：

$$X-\bigcup_{\alpha} A_\alpha=\bigcap_{\alpha}(X-A_\alpha),$$

$$X-\bigcap_{\alpha} A_\alpha=\bigcup_{\alpha}(X-A_\alpha).$$

2. (1°) R^n 中的子集 $A=\{(x_1,\cdots,x_n)\mid x_1^2+\cdots+x_n^2\leqslant 1\}$,则

$$A^\circ=\{(x_1,\cdots,x_n)\mid x_1^2+\cdots+x_n^2<1\},$$
$$A^e=\{(x_1,\cdots,x_n)\mid x_1^2+\cdots+x_n^2>1\},$$
$$\partial A=\{(x_1,\cdots,x_n)\mid x_1^2+\cdots+x_n^2=1\}.$$

(2°) R^1 中的子集 $R^1_{有}=\{x\mid x$ 为有理数$\}$,则

$$A^\circ=\phi, A^e=\phi, \partial A=R^1.$$

(3°) 任意个开集的交不一定是开集. 例如:R^1 中

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty}\left(-\frac{1}{n},\ \frac{1}{n}\right)=\{0\}.$$

(4°) 任意个闭集的併集不一定是闭集. 例如:R^1 中

$$\bigcup_{n=2}^{+\infty}\left[\frac{1}{n},1\right]=(0,1].$$

(5°) 如果将

$$A=\{(x,0)\mid 0<x<1\}$$

看作直线

$$R^1=\{(x,0)\mid -\infty<x<+\infty\}$$

的子集,则 A 是 R^1 的开集. 如果将 A 看作平面

$$R^2=\{(x,y)\mid -\infty<x,y<+\infty\}$$

的子集,则 A 既不是 R^2 的开集又不是 R^2 的闭集.

3. (1°) 证明例 3 中的结论.

(2°) 证明度量空间中的独点集$\{a\}$和有限集是闭集.

(3°) 证明定理 6 中的(1°),(3°),(4°).

4. 证明 (1°) A° 是 A 包含的所有开集的併集.

(2°) $\bar{A}$ 是所有包含 A 的闭集的交.

(3°) $x\in\bar{A}\Longleftrightarrow x$ 的任何邻域 $U(x)$ 必包含 A 的点,即 $U(x)\cap A\neq\phi$.

(4°) 如果 $A\subset B$,则 $A'\subset B'$;$A^\circ\subset B^\circ$.

5. 设 $A\subset R^1$，且 A' 是至多可数集，则 A 也是至多可数集。如果 A' 是非空的至多可数集，则 A 是可数集。

6. 证明 R^1 中的 $[0,1]$ 不能表示为可数个两两不相交的非空闭集的併集。

7*. 设 $F_n(n=1,2,\cdots)$ 为 R^1 中的闭集，若 $\bigcup_{n=1}^{+\infty} F_n$ 有内点，则至少有一个 F_n 存在着内点。

8*. 证明 R^1（或 $[0,1]$ 或 $(0,1)$）中的无理点不能表示成可数个闭集的併。

9. 证明 R^1（或 $[0,1]$ 或 $(0,1)$）中的有理点不能表示成可数个开集的交。

10*. 证明平面 R^2（或闭长方形）不能被两两无公共内点的闭圆片所覆盖。

11. 设 (A,τ_A) 是拓扑空间 (X,τ) 的子拓扑空间。证明：如果 A 是 X 的开（闭）子集，则 A 的一个开（闭）子集也是 X 的一个开（闭）子集。

举例说明，如果 A 不是 X 的开（闭）子集，结论不对。

12. 设 A 为拓扑空间 (X,τ) 的子集。证明

(1°) $(X-A)^\circ=X-\bar{A}$.

(2°) $\overline{X-A}=X-A^\circ$.

13. 设 A 和 B 是拓扑空间 (X,τ) 的子集。试只用闭包的四个性质证明

(1°) 若 $A\subset B$，则 $\bar{A}\subset\bar{B}$.

(2°) $\overline{A\cap B}\subset\bar{A}\cap\bar{B}$.

(3°) 若 $A\supset B$，则 $\bar{A}-\bar{B}\subset\overline{A-B}$.

14. 设 (Y,τ_Y) 是拓扑空间 (X,τ) 的子拓扑空间，证明 (1°) A 为 Y 中的闭集 $\Longleftrightarrow$ X 中存在闭集 E，使得 $A=E\cap Y$.

(2°) A 在 Y 中的闭包 $\tilde{A}=\bar{A}\cap Y$.

15. 设 (X,τ) 为拓扑空间，$x\in A\subset X$。如果存在 x 的邻域 $U(x)$ 使得

$$U(x)\cap A=\{x\},$$

则称 x 为 A 的**孤立点**。

如果 A 是闭集，而且 A 中没有孤立点，则称 A 为**完备集**（或**完全集**）。显然，

$$A\text{为完备集} \Longleftrightarrow A = A'.$$

例：设 $X=R^1$，构造 Cantor 集合 C 如下：

$$C_1=\left[0,\frac{1}{3}\right]\cup\left[\frac{2}{3},\ 1\right];$$

$$C_2=\left[0,\frac{1}{9}\right]\cup\left[\frac{2}{9},\ \frac{3}{9}\right]\cup\left[\frac{6}{9},\ \frac{7}{9}\right]\cup\left[\frac{8}{9},1\right];$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$C_n=\bigcup_{i\in\mathscr{V}}\left[\frac{i}{3^n},\ \frac{i+1}{3^n}\right],$$

其中

$$\mathscr{V}=\{i=\varepsilon_0\cdot 2+\varepsilon_1(2\times 3)+\cdots+\varepsilon_{n-1}(2\times 3^{n-1})\mid \varepsilon_j=0\text{ 或 }1\}.$$

令

$$C=\bigcap_{n=1}^{+\infty}C_n.$$

证明 (1°) C 是完备集.

(2°) 开集 $[0,1]-C$ 的总长度为 1.

(3°) 类似于 C 构造一个完备集 C_*，使得开集 $[0,1]-C_*$ 的总长度小于 1.

16. 设 A,B 为度量空间 (X,ρ) 的子集. 定义两个集合之间的距离为

$$\rho(A,B)=\begin{cases}0, & \text{当 } A \text{ 或 } B \text{ 是空集},\\ \inf\{\rho(x,y)\mid x\in A,y\in B\}, & \text{当 } A,B \text{ 非空时}.\end{cases}$$

特别地，$\rho(x,A)$ 表示 x 到集合 A 的距离.

(1°) 如果 $A\neq\phi$，则

$$\rho(x,A)=0\Longleftrightarrow x\in\bar{A},$$

即

$$\rho(x,A)>0\Longleftrightarrow x\overline{\in}\bar{A}.$$

特别当 A 为闭集时，

$$\rho(x,A)=0\Longleftrightarrow x\in A.$$

(2°) 举例说明 $x\overline{\in}A\nRightarrow\rho(x,A)>0$.

(3°) 若 $\bar{A}\cap\bar{B}\neq\phi$，则 $\rho(A,B)=0$.

(4°) 设 $A=\{(x,y)\mid y\leqslant 0\}$，$B=\{(x,y)\mid x>0,y>0,xy\geqslant 1\}$，显然 A，

B为R^2中的闭集，且

$$A\cap B=\bar{A}\cap\bar{B}=\phi,$$

但是，

$$\rho(A,B)=0。$$

17．设(X,ρ)为度量空间，$A\subset X$，A的直径定义为

$$d(A)=\begin{cases}0, & \text{当 } A=\phi,\\ \sup\{\rho(x,y)\mid x,y\in A\}, & \text{当 } A\neq\phi.\end{cases}$$

(1°) (X,ρ)是完备的$\Longleftrightarrow$对任何$\{B_n\}$，若$B_1\supset B_2\supset\cdots$，$B_n\subset X$是闭集，且

$$\lim_{n\to+\infty}d(B_n)=0,$$

则必存在

$$x\in\bigcap_{n=1}^{+\infty}B_n\ \left(\text{或}\bigcap_{n=1}^{+\infty}B_n=\{x\}\right).$$

(2°)下面的命题是否成立？

"$A\subset X$，A作为子度量空间是完备的$\Longleftrightarrow$对任何$\{B_n\}$，$B_1\supset B_2\supset\cdots$，$B_n\subset A\subset X$，$B_n$是$X$的闭集，且$d(B_n)\to 0$，则必存在$x\in\bigcap\limits_{n=1}^{+\infty}B_n$（当然$x\in A$）"。

试研究例子：

$$X=R^2,\ A=\left\{\left(\frac{1}{n},0\right)\middle|\, n=1,2,\cdots\right\}.$$

(3°)在(2°)中，如果把"B_n是X的闭集"改为"B_n为A的闭集"，结论如何？

§4 连续映射和同胚映射

1．映射

定义 1 设X,Y是集合，如果有一个对应法则，使得对任何$x\in X$，存在唯一的

$$y=f(x)\in Y$$

与之对应，我们就说给出了一个从X到Y的(单值)**映射**(**对应或映照**)f，记作

$$f: X\to Y\ (\text{或} X\xrightarrow{f} Y).$$

X称为f的**定义域**，而

$$f(X)=\{f(x)\mid x\in X\}\subset Y$$

称为f的**值域**(参看图6)。

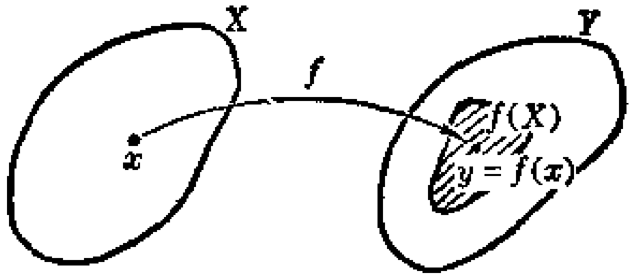


图 6

如果$f(X)=Y$，称f为**满射的**或**映上的**。

如果$f(x)=f(x')\Rightarrow x=x'$，称$f$为**单射的**或**一一映内的**。

如果f既是满射的，又是单射的(即在f下，X与Y是一一对应的)，称f为**双射的**或**一一映上的**(简称一一的)．此时令$x=f^{-1}(y)$，就得到一个f^{-1}: $Y\to X$，它也是双射的，称为f的**逆映射**。

例 1 (1°) 设$y_0\in Y$，如果

$$f: X\to Y,\ f(x)=y_0(\text{固定}),$$

则称f为以y_0为值的**常值映射**.

(2°) 如果f: $X\to X$，且对任何$x\in X$，有$f(x)=x$，则称f为X的**恒等映射**，用I_X表示.

(3°) 设$X\subset Y$，f: $X\to Y$，对任何$x\in X$ $f(x)=x$，则称f为**包含映射**。

(4°) 设 f: $X_1\times\cdots\times X_n\to Y$,

$$f(x_1,\cdots,x_n)=y(x_i\in X_i,i=1,\cdots,n)$$

则称 f 为 **n 变元映射**.

特别地,映射

$$f:\ \underbrace{R^1\times\cdots\times R^1}_{n\text{个}}=R^n\to R$$

是微积分中的 n 元函数.

(5°) 设 X,Y 都是实向量空间,如果映射

$$f:\ X\to Y$$

满足:

$$f(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)=\lambda_1f(x_1)+\lambda_2f(x_2)\ (x_1,x_2\in X,\lambda_1,\lambda_2\in R),$$

则称 f 为**线性映射**.

(6°) 在(4°) 中用 $f_{X_i}(x_1,\cdots,x_i,\cdots,x_n)=x_i$ 表示映射

$$f_{X_i}:\ X_1\times\cdots\times X_n\to X_i,$$

称 f_{X_i} 为第 i 个**投影**.

(7°) 设 $A\subset X$,我们定义

$$\chi_A:\ X\to\{0,1\}\subset R$$

为

$$\chi_A(x)=\begin{cases}1, & x\in A,\\ 0, & x\overline{\in}A.\end{cases}$$

称 χ_A 为 A 的**特征函数**.

(8°) §1 中的 $g=\langle,\rangle,\|\ \ \|,\rho$ 都是映射的例子.

定义 2 如果映射

$$f,g:X\to Y$$

满足 $f(x)=g(x)$(任何 $x\in X$),则称 f 和 g **相等**,记为 $f=g$.

设 f: $X\to Y$, g: $Y\to Z$,用

$$h(x)=g(f(x))\ \ (x\in X)$$

来定义映射 $h: X\to Z$；我们称 h 为 f 和 g 的**复合**，记作 $h=g\circ f$（参看图 7）。

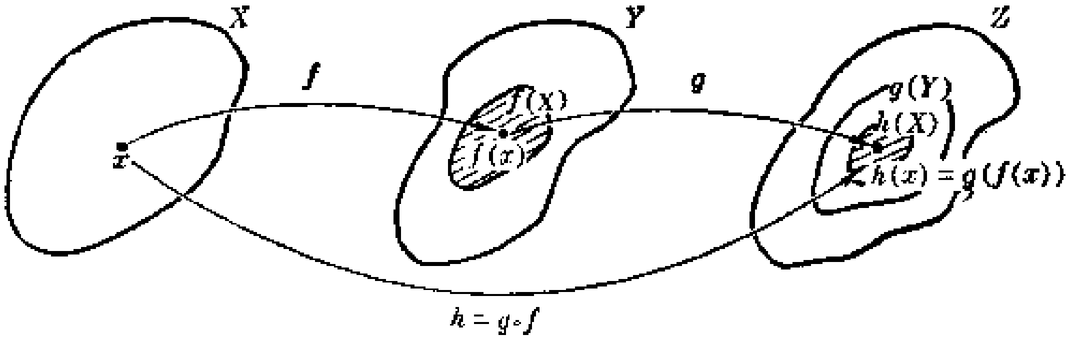


图 7

设 $A\subset X$，如果映射 $f: X\to Y$，$g: A\to Y$ 满足：

$$f(x)=g(x)\quad(x\in A),$$

则称 f 为 g 在 X 上的**扩张**（或**延拓**），而 g 为 f 在 A 上的**限制**，记作 $g=f|_A$（有时仍记为 f）。

设 $A\subset X$，称 $f(A)=\{f(x)|x\in A\}$ 为 A 在 f 下的**象**。如果 $B\subset Y$，则称

$$f^{-1}(B)=\{x|f(x)\in B\}$$

为 B 在 f 下的**逆象**（或**原象**）。

2．连续映射

定义 3 设 (X,τ_1)和(Y,τ_2)为拓扑空间，$f: X\to Y$是一个映射，$x_0\in X$。如果对 $f(x_0)$的任何邻域 $V(f(x_0))\subset Y$，必存在 x_0 的邻域 $U(x_0)\subset X$，使得

$$f(U(x_0))\subset V(f(x_0)),$$

则称 f 在点 x_0 处**连续**（参看图 8）。

如果 f 在 X 的每点都连续，我们称 f 为**连续映射**。

当 $Y=R$ 时，f 就是通常的**连续函数**。

定理 1 设(X,τ_1)和(Y,τ_2)是拓扑空间．$f: X\to Y$ 是映射，

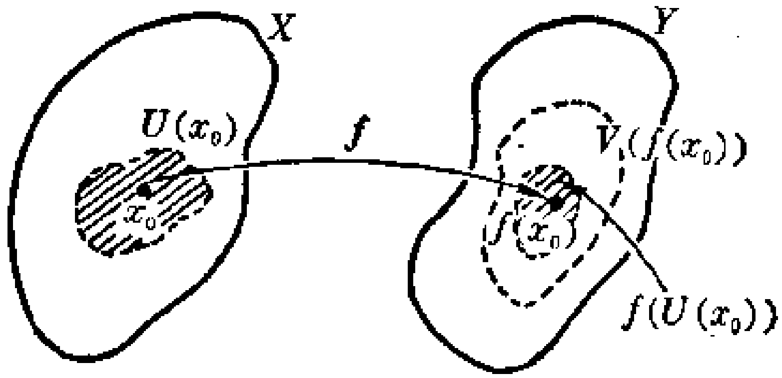


图 8

则下面四个条件是彼此等价的：

(1°) f 是连续映射；

(2°) Y 中每个开集在 f 下的逆象是 X 中的开集；

(3°) Y 中每个闭集在 f 下的逆象是 X 的闭集；

(4°) 对任何 $A\subset X$，$f(\overline{A})\subset\overline{f(A)}$.

证明 (1°⇒2°) 设 V 是 Y 中的任一开集. 如果 $f^{-1}(V)\neq\phi$，则对任何 $x_0\in f^{-1}(V)$，有 $f(x_0)\in V$(开集). 因为 f 是连续映射，特别地，在点 x_0 也连续，于是存在 x_0 的一个邻域 $U(x_0)$，使得 $f(U(x_0))\subset V$，即

$$U(x_0)\subset f^{-1}(V).$$

所以

$$f^{-1}(V)=\bigcup_{x_0\in f^{-1}(V)}U(x_0)\text{是}X\text{中的开集}.$$

(2°⇔3°) 由 $f^{-1}(Y-B)=X-f^{-1}(B)$ 推出(留作习题).

(3°⇒4°) (反证)若 (4°) 不成立，则存在一个 $A\subset X$ 和一点 $x_0\in\overline{A}$，使得

$$f(x_0)\overline{\in}\ \overline{f(A)}.$$

令 $B=\overline{f(A)}$，它是 Y 的一个闭集，容易证明 $f^{-1}(B)$ 不是 X 的闭集，因而与(3°)矛盾.

事实上，因为$f(A)\subset\overline{f(A)}=B$，所以 $A\subset f^{-1}(B)$，于是

$$x_0\in\overline{A}\subset\overline{f^{-1}(B)}.$$

此外，

$$f(x_0)\overline{\in}\ \overline{f(A)}=B,$$

即

$$x_0\overline{\in}f^{-1}(B),$$

因而 $f^{-1}(B)$不是X的闭集.

(4°⇒1°) （反证）如果（1°）不成立，则存在 $x_0\in X$，与Y中含 $f(x_0)$的某个开集V，使得 x_0 的每个邻域都有一点 $x\neq x_0$，其象 $f(x)\overline{\in}V$（参看图 9）．于是 x_0 是 $A=f^{-1}(Y-V)$的聚点，因而 $x_0\in\overline{A}$．此外，显然

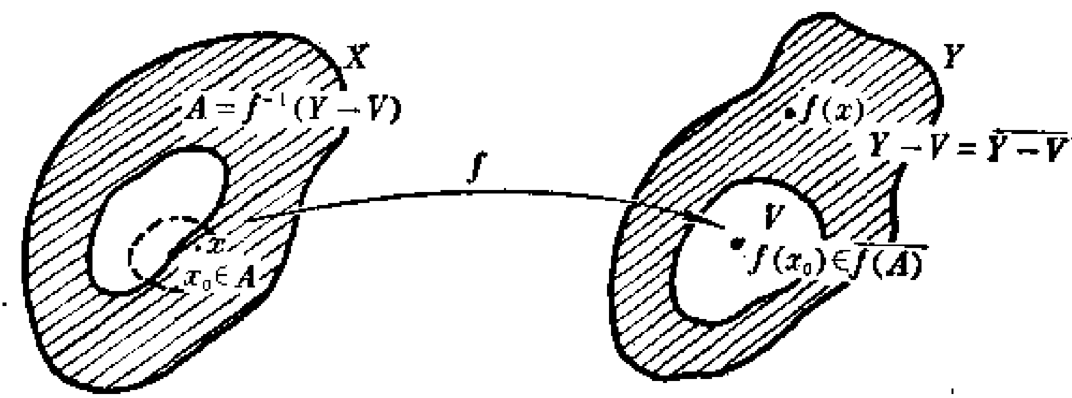


图 9

$$f(x_0)\overline{\in}Y-V=\overline{Y-V}\quad(Y-V\text{是闭集}).$$

因为

$$f(A)=ff^{-1}(Y-V)\subset Y-V$$

（留作习题），所以

$$\overline{f(A)}\subset\overline{Y-V},$$

推出

$$f(x_0)\overline{\in}\overline{f(A)}.$$

这与(4°)相矛盾．　　#

定理 2 设(X,τ_1)和(Y,τ_2)为拓扑空间．如果 $f: X\to Y$ 在 x 连续，则对于X中的任何$\{x_n\}$，$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=x$，必有$\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)=f(x)$．反之不成立．

证明 设V为$f(x)$的邻域，因为f在x连续，则存在x的邻域U，使得$f(U)\subset V$．由于$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=x\in U$（开集），故存在$N$，当$n>N$时，有$x_n\in U$（参看图 10）．于是对于$V$，存在$N$，当$n>N$时，有$f(x_n)\in V$，这就证明了$\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)=f(x)$．

反之不成立可参看例 2． #

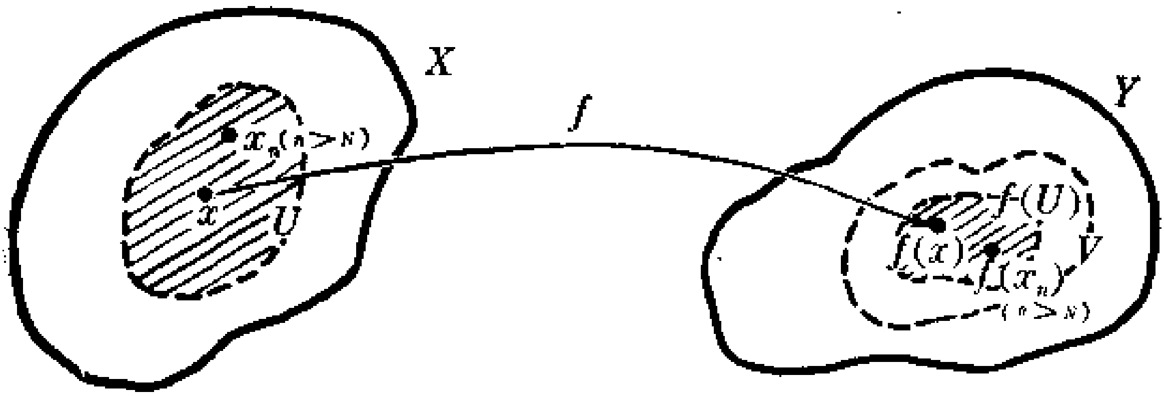


图 10

例 2 设(X,τ)为§3 例 6 中所述．$Y=\{y\mid 0\leqslant y\leqslant 1\}$为$R^1$的子拓扑空间．而

$$f: X\to Y$$

由$y=f(x)=x$来定义．由于$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=x(x_n,x\in X)$，必有$N$，当$n>N$时，$x_n=x$，所以

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n)=f(x).$$

但是，f在任何$x\in X$都不连续．事实上，我们取球形邻域$V(f(x),\varepsilon)$使得$Y-V(f(x),\varepsilon)$还含不可数个点．于是，显然不存在x在X中的邻域$U=X-C$（C至多可数集），使得

$$f(U)=U\subset V(f(x),\varepsilon) \qquad \#$$

定理 3 (1°)拓扑空间 (X,τ)的恒等映射 I_X 是连续映射.

(2°) 设(X,τ_1),(Y,τ_2)和(Z,τ_3)都是拓扑空间,且

$$f: X\to Y,\ g: Y\to Z,\ g\circ f: X\to Z$$

$$f(x_0)=y_0,\ g(y_0)=z_0,\ g\circ f(x_0)=z_0.$$

如果 f 在 x_0 连续;g 在 y_0 连续,则 $g\circ f$在 x_0 也连续.

(3°) 在(2°)中,如果 f 和 g 都是连续映射. 则 $g\circ f$ 也是连续映射.

证明 留作习题. #

定理 4 设(X,ρ_1)和(Y,ρ_2)都是度量空间,

$$f: X\to Y$$

是映射,则 f 在 x_0 连续$\Longleftrightarrow$对任何 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,当 $\rho_1(x,x_0)<\delta$ 时$(x,x_0\in X)$, 必有 $\rho_2(f(x), f(x_0))<\varepsilon\Longleftrightarrow$对$X$中的任何$\{x_n\}$, $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=x_0$, 必有 $\lim\limits_{n\to+\infty}f(x_n)=f(x_0)$.

证明 (1°)($\Rightarrow$) 任给 $\varepsilon>0$, 球形邻域$V(f(x_0), \varepsilon)$是Y中的开集. 由 f 在 x_0 连续, 存在X中的 x_0 的邻域$U(x_0)$, 使得 $f(U(x_0))\subset V(f(x_0),\varepsilon)$,所以存在球形邻域$U(x_0, \delta)\subset U(x_0)$,于是 $f(U(x_0, \delta))\subset V(f(x_0),\varepsilon)$.

($\Leftarrow$) 设$V(f(x_0))$是Y中的 $f(x_0)$ 的任一邻域, 则存在球形邻域

$$V(f(x_0), \varepsilon)\subset V(f(x_0)),$$

由题设存在球形邻域$U(x_0, \delta)$ (X中 x_0 的邻域) 使得 $f(U(x_0, \delta))\subset V(f(x_0), \varepsilon)\subset V(f(x_0))$.

(2°) ($\Rightarrow$) 由定理 2 即可推得.

($\Leftarrow$) (反证) 设 f 在 x_0 不连续, 则存在 $f(x_0)$的邻域V, 不存在 x_0 的邻域U, 使得 $f(U)\subset V$. 特别地, 在$U\left(x_0, \frac{1}{n}\right)$中总有一点 x_n, 使 $f(x_n)\overline{\in}V$. 显然, $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=x_0$, 但

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n)\neq f(x_0).$$

这与已知矛盾．#

3．同胚映射或拓扑映射

定义 4 设(X,τ_1)和(Y,τ_2)为拓扑空间，如果映射$f: X\to Y$是一一(映上)的，且f和其逆映射$f^{-1}: Y\to X$都是连续的，则称f为**同胚映射**或**拓扑映射**．

如果存在一个同胚映射$f: X\to Y$，则称拓扑空间 X 和 Y **是同胚的**，记作 $X\cong Y$．

在任一同胚映射下保持不变的性质，称为**拓扑性质**．

定理 5 设(X,τ_1)和(Y,τ_2)为拓扑空间，如果

$$f: X\to Y$$

是一一的连续映射，则下面的任一条件都能推出f是拓扑映射：

(1°) 如果A是X的任一开集，则$f(A)$是Y的开集；

(2°) 如果A是X的任一闭集，则$f(A)$是Y的闭集；

(3°) 对于任何$A\subset X$，则$f(\overline{A})\supset\overline{f(A)}$．

证明 (1°) 因为f是f^{-1}的逆映射，并且X的开集A在f^{-1}下的逆象$(f^{-1})^{-1}(A)=f(A)$是Y的开集，所以f^{-1}也连续．

(2°) 因为X的闭集A在f^{-1}下的逆象$(f^{-1})^{-1}(A)=f(A)$是Y的闭集，所以f^{-1}也连续．

(3°) 对任何$B\subset Y$，令$A=f^{-1}(B)$，则$f^{-1}(\overline{B})=f^{-1}(\overline{f(A)})\subset f^{-1}(f(\overline{A}))=\overline{A}=\overline{f^{-1}(B)}$，所以$f^{-1}$也连续．#

例 3 (1°) $f: (-\infty,\infty)\to(a,b)$，

$$y=f(x)=\frac{b-a}{\pi}\operatorname{arc\,tg} x+\frac{b+a}{2}$$

是一个同胚，并且f有各阶导数．

(2°) $f: R^n\to\{x\in R^n \mid \|x\|<1\}$，

$$y=f(x)=\frac{x}{1+\|x\|}$$

是一个同胚。

(3°) f:椭球面 $\left\{x=(x_1,\cdots,x_n)\mid\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^2}{a_i^2}=1\right\}$

→单位球面 $S^{n-1}=\left\{x=(x_1,\cdots,x_n)\mid\sum_{i=1}^{n}x_i^2=1\right\}$,

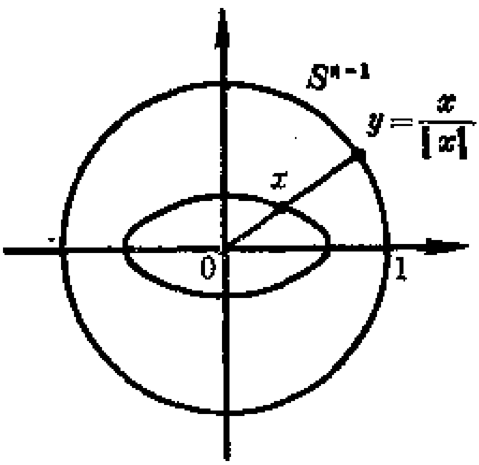


图 11

$$y=f(x)=\frac{x}{\|x\|}$$

是一个同胚(参看图 11)。

(4°) 设 $X=\{\theta\mid 0\leqslant\theta<2\pi\}$,

$Y=\{(\cos\theta,\sin\theta)\mid 0\leqslant\theta<2\pi\}\subset R^2$,

$$f: X\to Y,$$

$$y=f(\theta)=(\cos\theta,\sin\theta).$$

显然,f 是一一的连续的映射(参看图 12),但不是同胚映射.(反证)若 f 是同胚映射,则 f^{-1} 是连续映射,但对于 X 中的闭集 $[\pi,2\pi)$,

$(f^{-1})^{-1}([\pi,2\pi))=f([\pi,2\pi))=\{(\cos\theta,\sin\theta)\mid\pi\leqslant\theta<2\pi\}$

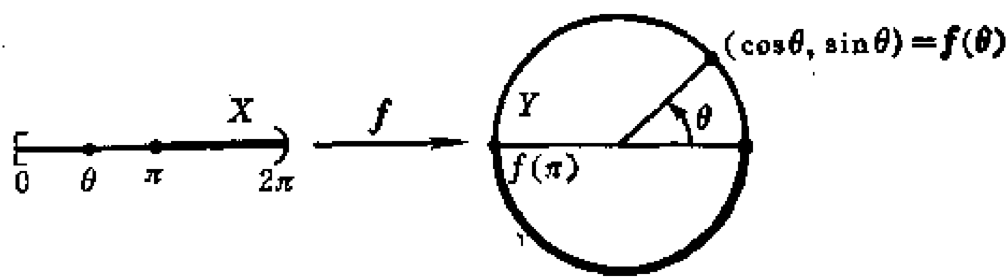


图 12

不是 Y 中的闭集,这与定理 1 中的(3°)相矛盾。

§4 习 题

1. (1°) 证明结合律：设 $X\xrightarrow{f}Y\xrightarrow{g}Z\xrightarrow{h}W$，则 $h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f$.

(2°) 设 $f:X\to Y$ 是一一映上的，则 $f^{-1}\circ f=I_X$，$f\circ f^{-1}=I_Y$.

(3°) 验证：由一一映上的映射 $f:X\to X$ 的全体所成的集合，按照上面的"$\circ$"构成一个群。该群的单位元为 I_X，f 的逆元为 f^{-1}.

2. 设 $f:X\to Y$ 是映射。$A,A_1,A_2,A_\lambda\subset X$，$B,B_1,B_2,B_\lambda\subset Y$，证明

(1°) 若 $A_1\subset A_2$，则 $f(A_1)\subset f(A_2)$，

$$f\Big(\bigcup_\lambda A_\lambda\Big)=\bigcup_\lambda f(A_\lambda).$$

$f\Big(\bigcap\limits_\lambda A_\lambda\Big)\subset\bigcap\limits_\lambda f(A_\lambda)$，并举出 $f(A_1\cap A_2)\neq f(A_1)\cap f(A_2)$ 的例子。

(2°) 若 $B_1\subset B_2$，则 $f^{-1}(B_1)\subset f^{-1}(B_2)$，

$$f^{-1}\Big(\bigcup_\lambda B_\lambda\Big)=\bigcup_\lambda f^{-1}(B_\lambda),$$

$$f^{-1}\Big(\bigcap_\lambda B_\lambda\Big)=\bigcap_\lambda f^{-1}(B_\lambda),$$

$A\subset f^{-1}(f(A))$，

$f(f^{-1}(B))\subset B$ 及 $f(f^{-1}(B))=B\cap f(X)$，

$f^{-1}(Y-B)=X-f^{-1}(B)$，

3. 对于度量空间 (X,ρ)，直接证明：定理1中的 (4°) $\Longleftrightarrow$ 对任何 $x\in X$ 及 X 中的任何 $\{x_n\}$，$\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=x$，必有 $\lim\limits_{n\to+\infty}f(x_n)=f(x)$.

4. 设 (X,τ)，$(Y_i,\tau_i)(i=1,\cdots,n)$ 为拓扑空间，$f:X\to Y_1\times\cdots\times Y_n$ 是映射，而且 $f(x)=(f_1(x),\cdots,f_n(x))$，$x\in X$. 证明：

f 是连续映射 $\Longleftrightarrow f_i(i=1,\cdots,n)$ 都是连续映射。

5.[*] 设 (X,τ) 是拓扑空间。

(1°) 如果 $f:X\to R$ 是连续函数。证明：$\{x\mid f(x)>c\}$ 和 $\{x\mid f(x)<c\}$ 都是 X 中的开集，而 $\{x\mid f(x)\geqslant c\}$，$\{x\mid f(x)\leqslant c\}$ 和 $\{x\mid f(x)=c\}$ 都是

X中的闭集。

(2°) $f: X\to R$ 是连续函数

$\Longleftrightarrow$对任何 $c\in R$, $\{x\mid f(x)>c\}$和$\{x\mid f(x)<c\}$ 都是X的开集。

$\Longleftrightarrow$对任何 $c\in R$, $\{x\mid f(x)\geqslant c\}$和$\{x\mid f(x)\leqslant c\}$ 都是X的闭集。

(3°) 举例说明：对任何 $c\in R$, $\{x\mid f(x)>c\}$ 都是X的开集$\not\Rightarrow f$ $X\to R$是连续函数。

6．(1°) 设$(X,\tau_{离散})$为离散拓扑空间，(Y,τ)为拓扑空间，证明：任何映射$f: X\to Y$ 都是连续的。

(2°) 设X是多于两点的集合，$(X,\tau_{平庸})$为平庸拓扑空间，(Y,τ)为拓扑空间，证明：

$f: X\to Y$是连续映射$\Longleftrightarrow$对Y中的任何开集G，且$G\cap f(x)\neq\phi$，则必有$f(X)\subset G$。

(3°) 在(2°)中(Y,τ)改为度量空间(Y,ρ)，则$f: X\to Y$ 是连续映射$\Longleftrightarrow f$是常值映射。

7．(1°) 设(X,ρ)为度量空间．$\rho_1((x,y),(x_0,y_0))=[\rho^2(x,x_0)+\rho^2(y,y_0)]^{\frac{1}{2}}$表示积空间$X\times X$中的度量．证明：$\rho_1$ $X\times X\to R$ 是连续函数。

(2°) 设(X,ρ)为度量空间．$A\subset X$, f, $X\to R$, $f(x)=\rho(x,A)$．证明：$f(x)=\rho(x,A)$在X上是一致连续的，即

任给 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, 当 $\rho(x,x')<\delta$ $(x,x'\in X)$, 有

$$|f(x)-f(x')|=|\rho(x,A)-\rho(x',A)|<\varepsilon.$$

自然$f(x)=\rho(x,A)$是连续函数。

(3°) 在(1°)中，ρ 是一致连续函数吗？

8．设(X,ρ)为度量空间，$f: X\to R$是映射，称

$\omega_f(x_0,r)=\sup\{f(x)\mid\rho(x,x_0)<r\}-\inf\{f(x)\mid\rho(x,x_0)<r\}$ 为 f 在$\{x\mid\rho(x,x_0)<r\}$中的振幅．称

$$\omega_f(x_0)=\lim_{r\to 0+}\omega_f(x_0,r)$$

为f在x_0的振幅．证明：

f 在 x_0 连续 $\Longleftrightarrow \omega_f(x_0)=0$。

9．(1°) 在 R^1 上构造一个函数 $f:R^1\to R$，使得 f 在无理点连续，在有理点不连续。

(2°)* 证明：在 R^1 上不存在一个函数 $f:R^1\to R$，使得 f 在有理点连续，在无理点不连续。

10.* 在 R^2 中的直线 $y=x$ 上的每一点处作如图 13 所示的半开半闭的小正方形。令

$$A=\bigcup_{p\text{为有理点}} \square_p$$

$$B=\bigcup_{q\text{为无理点}} \square_q$$

(R^2中的有理点就是两个坐标都是有理数的点，无理点就是至少有一个坐标为无理数的点)。

证明：$A\cap B\neq\phi$。

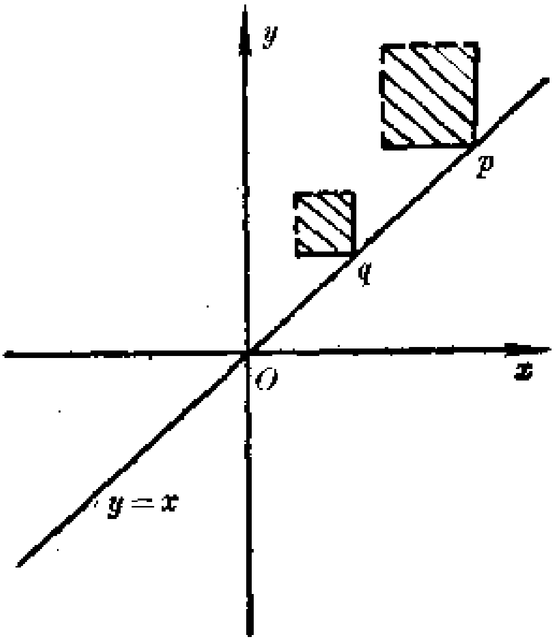


图 13

11．设 $\{F_i|i=1,\cdots,n\}$ 是拓扑空间 (X,τ_1) 的一个有限闭覆盖，而 f_i: $F_i\to Y$ 是从 F_i 到拓扑空间 (Y,τ_2) 的连续映射，使得

$$f_i|_{(F_i\cap F_j)}=f_j|_{(F_i\cap F_j)}$$

(对于每一对 i 和 j)。令映射 $f:X\to Y$，使得 $f|_{F_i}=f_i$。证明：f 是一个连续映射。

12．(1°) 证明：拓扑空间的同胚关系是一个等价关系。即 $X\cong X$；$X\cong Y\Rightarrow Y\cong X$；$X\cong Y$ 与 $Y\cong Z\Rightarrow X\cong Z$。

(2°) 证明：开集、闭集、闭包和收敛点列都是拓扑性质。

13．设 $\varphi:R^1\to R^1$ 是映射．把第一个 R^1 当作 x_1 轴，而第二个 R^1 当作 x_2 轴，并且作出 R^2 中的子集 $A=\{(x_1,\varphi(x_1))\}$。然后用 $(x_1,\varphi(x_1))\to x_1$ 来定义映射 $f:A\to R^1$。证明：f 是同胚映射 $\Longleftrightarrow \varphi$ 连续。

14．证明下列每对拓扑空间同胚：

(1°) n 维球面 $S^n=\{x=(x_1,\cdots,x_{n+1})|\sum_{j=1}^{n+1}x_j^2=r^2\}$ 与 n 维正方形面 ∂A，其中

$$A=\{x=(x_1,\cdots,x_{n+1})||x_j|\leqslant 1,j=1,2,\cdots,n+1\}.$$

(2°) R^n 与 $S^n-\{(0,\cdots,0,1)\}$.

15. 设 $V^n=\{x=(x_1,\cdots,x_n)|\sum_{j=1}^{n}x_j^2<1\}$，$p,q\in V^n$. 作同胚映射 f：$\bar{V}^n\to\bar{V}^n$，使得 $f|_{S^{n-1}}=I_{S^{n-1}}$（恒等映射），$f(p)=q$.

16. 设 $(X_1\times\cdots\times X_n,\tau)$ 是 $(X_i,\tau_i)(i=1,\cdots,n)$ 的积拓扑空间. 令

$$f_{X_i}(x_1,\cdots,x_n)=x_i$$

为第 i 个投影. 证明：f_{X_i} 是连续映射.

17. (1°) 设 (Y,τ_2) 为拓扑空间，X 是一个集合. $f:X\to Y$ 为映射. 令

$$\tau_1=\{f^{-1}(G)|G\in\tau_2\},$$

则 (X,τ_1) 是一个拓扑空间，且 f 为连续映射. (X,τ_1) 称为从 (Y,τ_2) **由 f 诱导的拓扑空间**.

(2°) 特殊情形：$X\subset Y$. $f=I:X\to Y$ 是包含映射. 令

$$\tau_1=\{I^{-1}(G)|G\in\tau_2\}=\{X\cap G|G\in\tau_2\},$$

则 (X,τ_1) 就是 (Y,τ_2) 的子拓扑空间.

18. (1°) 设 (X,τ_1) 为拓扑空间；Y 为集合，且 $f:X\to Y$ 是满映射，令

$$\tau_2=\{G|f^{-1}(G)\in\tau_1\},$$

则 (Y,τ_2) 是拓扑空间，且 f 是连续映射.

(2°) 设 (X,τ_1) 为拓扑空间，"$\sim$"为 X 上的一个等价关系（即满足：$x\sim x$；若 $x\sim y$，则 $y\sim x$；若 $x\sim y,y\sim z$，则 $x\sim z$）. 我们定义等价类 $[x]=\{y|y\sim x\}$. 令 $Y={}^X/_\sim=\{[x]|x\in X\}$，$f:X\to Y={}^X/_\sim$，$f(x)=[x]$，于是由(1°)可得到 $(Y,\tau_2)=({}^X/_\sim,\tau_2)$ 是拓扑空间，而 f 是连续映射.

(3°) 反之，由(1°)中的 f 可定义"$\sim$"为：$x_1\sim x_2(x_1,x_2\in X)\Longleftrightarrow f(x_1)=f(x_2)$. 于是 ${}^X/_\sim$ 与 Y 如下一一对应，$[x]\longleftrightarrow f(x)$，因此可写作 $Y={}^X/_\sim$，这时 $f(x)=[x]$. 由(1°)，(2°)和(3°)，我们称 $(Y,\tau_2)=({}^X/_\sim,\tau_2)$ 为**商拓扑空间（或粘合拓扑空间）**.

(4°) 设 $X=S^n$，$x\sim y(x,y\in S^n)\Longleftrightarrow y=\pm x$. $Y={}^{S^n}/_\sim$ 记为 P^n，在 P^n

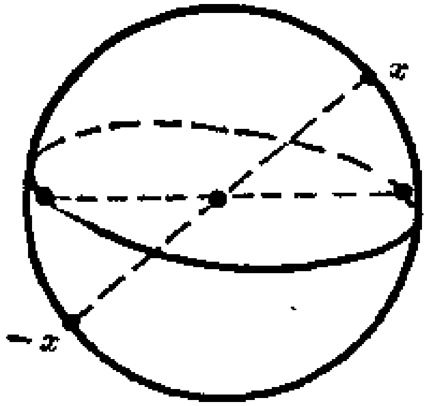


图 14　2 维射影平面

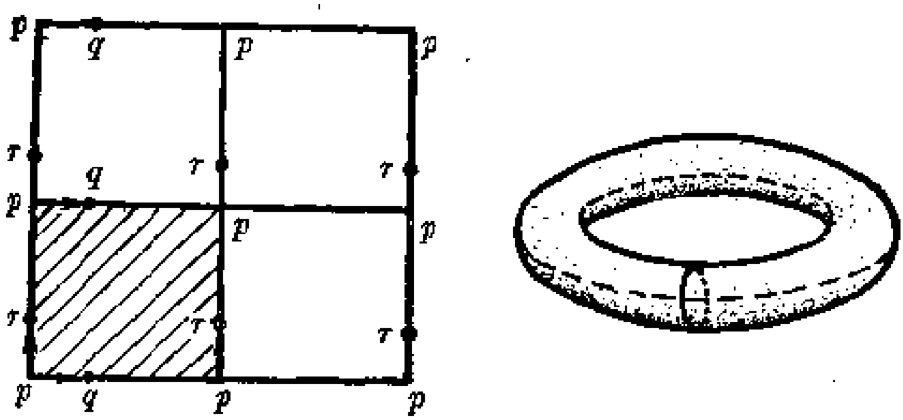


图 15　2 维环面

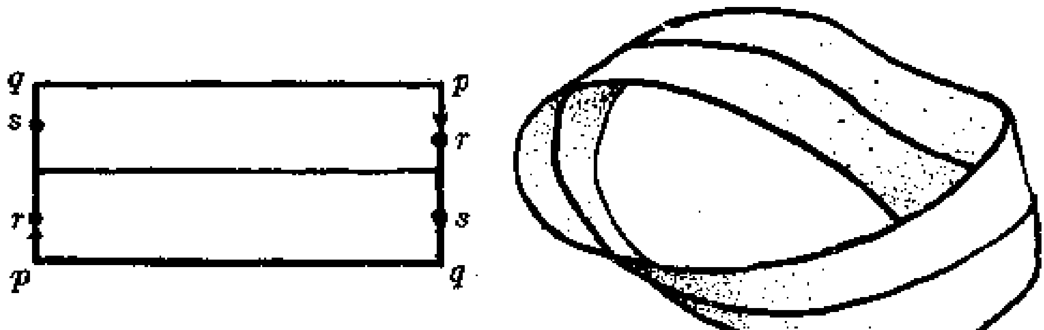


图 16　Möbius 带

上定义的商拓扑空间，称为**n维实射(投)影空间**(参看图 14)。

(5°) 设 $X=R^1$; $x\sim y(x,y\in R^1)\Longleftrightarrow y=x+n$($n$ 为整数)。在 $Y={}^{R^1}/_{\sim}$ 上定义的商拓扑空间与 R^2 中的单位圆 S^1 同胚。

(6°) 设$X=R^n$, $x=(x_1,\cdots,x_n)$, $y=(y_1,\cdots,y_n)\in R^n$, $x\sim y\Longleftrightarrow y_i=x^i$

$+n_i$ (n_i 为整数，$i=1,\cdots,n$)，在 $Y=\mathbf{R}^n/\sim$ 上定义的商拓扑空间称为 n 维环面（参看图 15）。它同胚于 $\underbrace{S^1\times\cdots\times S^1}_{n\text{ 个}}$。

（7°）将长方形带子扭转180°并粘合其两端得到的拓扑空间称为Möbius带（参看图 16）。则它可以视作一个商拓扑空间。

（8°）将[0,1]×[0,1]粘合一双对边（得到一个柱面）然后扭转 180°再粘合另一双对边得到 Klein 瓶（参看图 17）。则它可以视作一个商拓扑空间。

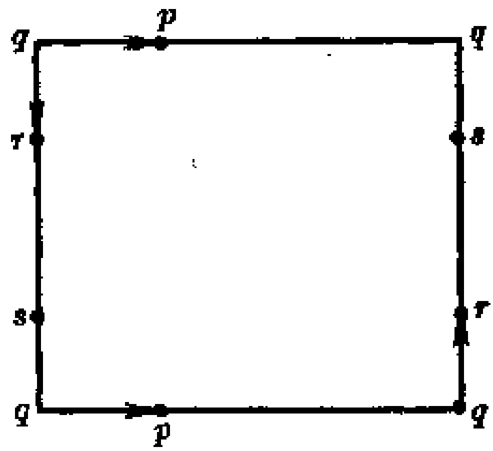


图 17 Klein 瓶

§ 5 可数性和分离性

1. 可数性

定义 1 设(X,τ)为拓扑空间，如果对每一点 $x\in X$，存在 x 处的一个可数拓扑基（即点 x 的一个邻域族 $\tau_*(x)=\{G_\alpha\}$，它对 x 的任何邻域 G，都有 $G_\alpha\in\tau_*(x)$，使得 $x\in G_\alpha\subset G$），则称(X,τ)为 A_1(拓扑)空间。

定义 2 如果拓扑空间(X,τ)存在一个可数拓扑基，则称(X,τ)为 A_2(拓扑)空间。

定理 1 A_2 空间⇒A_1 空间。反之不成立。

证明 设 τ'_* 是 A_2 空间(X,τ)的可数拓扑基。对任何$x\in X$，令 $\tau_*(x)=\{G\mid x\in G, G\in\tau'_*\}$，容易验证 $\tau_*(x)$ 满足定义 1 中的条

件，因此(X,τ)是A_1空间．反之不成立可参看例1．#

例 1 设X=集合R^1，取离散拓扑空间$(X,\tau_{离散})$，X的任何子集既是开集又是闭集．因为$(X,\tau_{离散})$的任一拓扑基必须包含所有的独点集，所以不可数，这就证明了它不是A_2空间．此外，独点集$\{x\}$显然形成点x处的一个可数拓扑基，因而$(X,\tau_{离散})$是A_1空间．

例 2 §3例6中的(X,τ)不是A_1空间．

（反证）设$x\in X$，$\{X-C_n | C_n$是至多可数集，$n=1,2,\cdots\}$是x处的一个可数拓扑基．因X不可数，存在$a\in X$，$a\neq x$，$a\in \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$．$X-\{a\}$是$x$的一个邻域，但$X-C_n \not\subset X-\{a\}(n=1,2,\cdots)$，这与$\{X-C_n\}$是$x$处的拓扑基相矛盾．于是，$(X,\tau)$不是$A_1$空间．

定理 2 拓扑空间(X,τ)为A_2空间$\Rightarrow(X,\tau)$有可数稠密子集．反之不成立．

证明 设$\{G_n | n=1,2,\cdots\}$是X的可数拓扑基．令$Y=\{y_n | y_n\in G_n\}$，容易证明Y是X的可数稠密子集．事实上，对任何$x\in X$和x的邻域G，存在G_{n_0}使得$x\in G_{n_0}\subset G$，于是$y_{n_0}\in G$，则$x\in\overline{Y}$，$\overline{Y}=X$．反之不成立可参看例3．#

例 3 若Y是不含x的不可数集，令$X=\{x\}\cup Y$，$\tau=\{\phi;\{x\}\cup A | A\subset Y\}$．容易验证$(X,\tau)$是拓扑空间，且$\overline{\{x\}}=X$，所以$X$具有可数稠密子集．但由于$(X,\tau)$的任何拓扑基必包含开集族$\{\{x\}\cup\{y\} | y\in Y\}$，而它是不可数的．因此，$(X,\tau)$无可数拓扑基，即不是$A_2$空间．

定义 3 如果度量空间(X,ρ)有一个可数稠密子集，则称(X,ρ)为**可分度量空间**．

定理 3 设(X,τ)为由度量空间(X,ρ)诱导的拓扑空间．则

以下三个条件是彼此等价的：

(1°) (X,τ)是 A_2 空间；

(2°) (X,ρ)有一个可数球形邻域族为(X,τ)的拓扑基；

(3°) (X,ρ)是可分度量空间。

证明 (2°⇒1°) 由 A_2 空间的定义即得。

(1°⇒3°) 由定理 2 即得。

(3°⇒2°) 设 Y 是可分度量空间(X,ρ)的可数稠密子集，则 $\tau_*=\{U(y,r)\,|\,y\in Y,r$ 为有理数$\}$是(X,ρ)的可数球形邻域族，它是一个拓扑基。因为$\tau_*\subset\tau$，所以只须验证 X 的任一开集 G 和任何 $x\in G$，存在 $U(y,r)\in\tau_*$，使得 $x\in U(y,r)\subset G$。

当 $G=X$ 时，任取一点 $y\in Y$ 和有理数 $r>\rho(x,y)$ 则 $x\in U(y,r)\subset X=G$。

当 $G\neq X$ 时，因为 $x\overline{\in}X-G$(闭集)，所以 $d=\rho(x,X-G)>0$ (参看§3 习题 16)。则存在 $y\in Y$，使 $\rho(x,y)<\frac{d}{3}$。再取有理数r 满足$\frac{d}{3}<r<\frac{2d}{3}$。于是，$x\in U(y,r)\subset G$.#

定义 4 设 (X,τ) 为拓扑空间，$Y\subset X$. 如果 $\eta=\{G_\alpha\}$ 是 X 的一族子集，使得

$$Y\subset\bigcup_\alpha G_\alpha,$$

则称 η 为 Y 的在 X 中的一个**覆盖**。如果 η 中元素的个数是有限的或可数的，则 η 分别称为**有限的或可数的覆盖**。如果 $\eta'\subset\eta$ 也是 Y 的在 X 中的一个覆盖，则称 η' 为 η 的**子覆盖**。如果 $Y=X$，我们简称 η 为 X 的覆盖。特别当所有的 G_α 为开(闭)集时，称 η 为 Y 的在 X 中的**开(闭)覆盖**。

定理 4 (Lindelöf) 设(X,τ)为 A_2 空间(即具有可数拓扑基 τ_*)，则它的任一开覆盖 η 有一个可数的子覆盖。

证明 设 $\tau'_* = \{B \mid B \in \tau_*, B \subset G, G \in \eta\} \subset \tau_*$. 对于每个 $B' \in \tau'_*$，取定一个 $G(B') \in \eta$，使得 $B' \subset G(B')$. 我们令

$$\eta' = \{G(B') \mid B' \in \tau'_*\}.$$

由于 τ'_* 可数，η' 是 η 的可数子族. 余下的只须证明 η' 是 η 的子覆盖. 事实上，对任何 $x \in X$，必有 $G \in \eta$，$x \in G$. 于是存在 $B \in \tau_*$，使 $x \in B \subset G$. 从 τ'_* 的定义可知 $B \in \tau'_*$. 这就证明了

$$x \in G(B) \in \eta'. \#$$

2. 分离性

定义 5 如果拓扑空间 (X,τ) 的任意两个不同的点有不相交的邻域，则称 (X,τ) 为 **T_2 空间或 Hausdoff 空间**.

定理 5 (1°) 设 (X,τ) 为 T_2 空间，则它的子拓扑空间 Y 也是 T_2 空间.

(2°) 设 (X_1,τ_1) 和 (X_2,τ_2) 为 T_2 空间，则它们的积拓扑空间也是 T_2 空间.

证明 (1°) 设 $x, y \in Y \subset X$，$x \neq y$. 由 (X,τ) 是 T_2 空间，存在 x 和 y 的不相交的邻域 $U(x)$ 和 $U(y)$，则 $U(x) \cap Y$ 和 $U(y) \cap Y$ 是 x 和 y 关于 Y 的不相交的邻域，于是子空间 Y 也是 T_2 空间.

(2°) 设 $(x_1,x_2), (y_1,y_2) \in X_1 \times X_2$，$(x_1,x_2) \neq (y_1,y_2)$，则至少有一个分量不同，不妨设 $x_2 \neq y_2$. 由于 (X_2,τ_2) 是 T_2 空间，所以存在 x_2 和 y_2 关于 (X_2,τ_2) 的不相交邻域 $V(x_2)$ 和 $V(y_2)$，而 $X_1 \times V(x_2)$ 和 $X_1 \times V(y_2)$ 就是 (x_1,x_2) 和 (y_1,y_2) 关于积拓扑空间的不相交的邻域，这证明了积拓扑空间也是 T_2 空间. #

定义 6 如果拓扑空间 (X,τ) 的任意一点与不包含此点的任何一个闭集有不相交的邻域，则称 (X,τ) 为**正则空间**.

如果拓扑空间 (X,τ) 的任意两个不相交的闭集有不相交的邻域，则称 (X,τ) 为**正规空间**.

定理 6 设 (X,τ) 为拓扑空间，则

(1°) (X,τ) 为正则空间 $\Longleftrightarrow$ 拓扑空间 (X,τ) 的任一点 x 的每

个邻域$U(x)$，必存在x的邻域$V(x)$，使得$\overline{V(x)}\subset U(x)$.

(2°) (X,τ)为正规空间$\Longleftrightarrow$拓扑空间(X,τ)的任一闭集F的每个邻域$U(F)$（即含F的开集），必存在F的邻域$V(F)$，使得$\overline{V(F)}\subset U(F)$.

证明 (1°) ($\Rightarrow$) 因为(X,τ)是正则的，所以x与闭集$F=X-U(x)$各有一个邻域$V(x)$和$V(F)$，使得$V(x)\cap V(F)=\phi$，即$V(x)\subset X-V(F)$. 于是

$$\overline{V(x)}\subset\overline{X-V(F)}=X-V(F)\subset X-F=U(x).$$

($\Leftarrow$) 设$x\subset X$，F是(X,τ)的闭集，且$x\overline{\in}F$. 显然$U(x)=X-F$是x的一个邻域. 由题设，存在x的邻域$V(x)$，使得$\overline{V(x)}\subset U(x)$. 因为$U(x)\cap F=(X-F)\cap F=\phi$，$\overline{V(x)}\cap F=\phi$，所以

$$X-\overline{V(x)}$$

是F的一个邻域，且$V(x)\cap(X-\overline{V(x)})=\phi$.

(2°) ($\Rightarrow$) 因为(X,τ)是正规空间，则两个不相交的闭集F与$F^*=X-U(F)$各有一个邻域$V(F)$与$V(F^*)$，使得$V(F)\cap V(F^*)=\phi$，于是$V(F)\subset X-V(F^*)$，

$$\overline{V(F)}\subset\overline{X-V(F^*)}=X-V(F^*)\subset X-F^*=U(F).$$

($\Leftarrow$) 设F_1和F_2是(X,τ)的任意两个不相交的闭集. 容易看出，$U(F_1)=X-F_2$是F_1的一个邻域. 根据题设，存在F_1的邻域$V(F_1)$，使得$\overline{V(F_1)}\subset U(F_1)$. 因为$U(F_1)\cap F_2=(X-F_2)\cap F_2=\phi$，$\overline{V(F_1)}\cap F_2=\phi$，所以$X-\overline{V(F_1)}$是$F_2$的一个邻域，且

$$V(F_1)\cap(X-\overline{V(F_1)})=\phi. \#$$

定理 7 设(X,ρ)为度量空间，则由它诱导的拓扑空间(X,τ)是T_2空间、正则空间和正规空间.

证明 (1°) 对任何$x_1, x_2 \in X$，$x_1 \neq x_2$，$U\left(x_1, \frac{\rho(x_1, x_2)}{2}\right)$和$U\left(x_2, \frac{\rho(x_1, x_2)}{2}\right)$分别是 x_1 和 x_2 的不相交的邻域．因此，(X, τ)是T_2空间．

(2°) 设F是(X, τ)的闭集，$x \overline{\in} F$，根据§ 3 习题 16，$\rho(x, F) > 0$．于是$U\left(x, \frac{\rho(x, F)}{2}\right)$与$X - \overline{U\left(x, \frac{\rho(x, F)}{2}\right)}$分别是 x 和 F 的不相交的邻域．因此，(X, τ) 是正则空间．

(3°) 设 F_1 和 F_2 是(X, τ) 的任意两个不相交的闭集．对于$x_1 \in F_1$，$x_2 \in F_2$，

由 $\varepsilon_1(x_1) = \frac{1}{2}\rho(x_1, F_2) > 0$ 和 $\varepsilon_2(x_2) = \frac{1}{2}\rho(x_2, F_1) > 0$ 得到

$$U(F_1) = \bigcup_{x_1 \in F_1} U(x_1, \varepsilon_1(x_1))\text{和}U(F_2) = \bigcup_{x_2 \in F_2} U(x_2, \varepsilon_2(x_2))$$

分别是 F_1 和 F_2 的邻域．

假设 $U(F_1) \cap U(F_2) \neq \phi$，即存在 $x \in U(F_1) \cap U(F_2)$．于是有 $x_1 \in F_1$，$x_2 \in F_2$，使得

$$x \in U(x_1, \varepsilon_1(x_1)) \cap U(x_2, \varepsilon_2(x_2)).$$

我们不妨设 $\varepsilon_1(x_1) \geqslant \varepsilon_2(x_2)$，则

$$\rho(x_1, F_2) \leqslant \rho(x_1, x_2) \leqslant \rho(x_1, x) + \rho(x_2, x) < \varepsilon_1(x_1) + \varepsilon_2(x_2) \leqslant 2\,\varepsilon_1(x_1) = \rho(x_1, F_2),$$

这就推出了矛盾．#

注 因为(X, ρ) 中独点集是闭集，所以定理 7 中的 (1°) 和 (2°)可以作为(3°)的特例．

例 4 T_2 空间但既非正则空间又非正规空间的例子．设

$$X = \{(x, y) \in R^2 \mid y \geqslant 0\},\ R^1 = \{(x, 0)\} \subset X.$$

记 $U(p, \varepsilon)$为 R^2 中的通常的球形邻域．

对于任何 $p\in X,\varepsilon>0$，定义

$$V(p,\varepsilon)=\begin{cases}U(p,\varepsilon)\cap X, & \text{当 } p\in X-R^1.\\ [U(p,\varepsilon)\cap(X-R^1)]\cup\{p\}, & \text{当 } p\in R^1.\end{cases}$$

(参看图 18)容易验证 $\tau_*=\{V(p,\varepsilon)\}$是 X 的一个拓扑基，因而诱导出一个拓扑空间(X,τ).

设 $p,q\in X$，且 $p\neq q$，则取 $\varepsilon=\dfrac{\rho(p,q)}{2}>0$，于是

$$p\in V(p,\varepsilon),q\in V(q,\varepsilon),V(p,\varepsilon)\cap V(q,\varepsilon)=\phi,$$

即(X,τ)是 T_2 空间.

此外，点 $a=(0,0)$与 $R^1-\{a\}=X-\bigcup\limits_{\varepsilon>0}V(a,\varepsilon)$都是闭集.

易证它们无不相交的邻域(留作习题). 因此，(X,τ)既非正则空间又非正规空间.

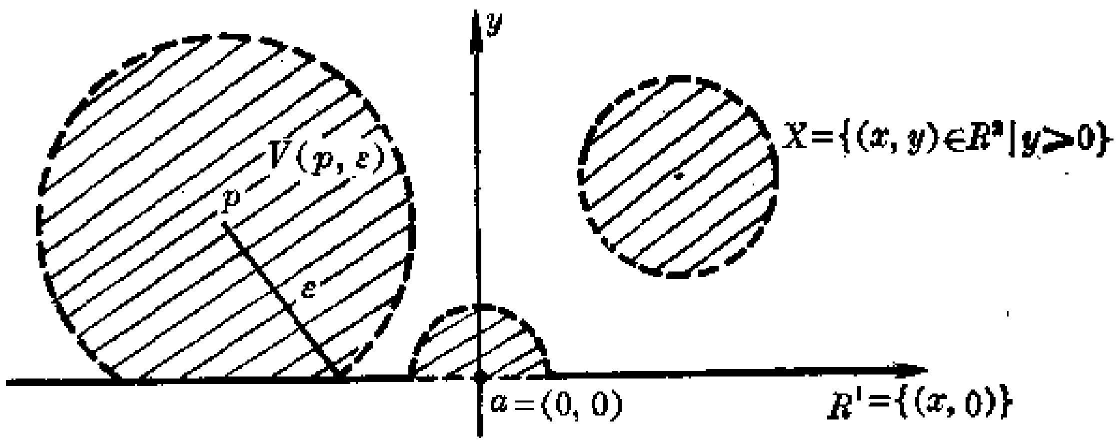


图 18

§6 习 题

1. 证明有限拓扑空间(点集有限)和 Euclid 空间 R^n 都是 A_2 空间. 并直接验证它们有可数稠密子集.

2. 证明度量空间(X,ρ)是 A_1 空间. 并举例说明不必是 A_2 空间.

3. 利用下面两种方法证明度量空间(X,ρ)是正规空间：设 F_1 和 F_2 是任意两个不相交的闭集. 若令

(1°) $U(F_1)=\{x\in X\mid\rho(x,F_1)<\rho(x,F_2)\}$,

$U(F_2)=\{x\in X\mid\rho(x,F_1)>\rho(x,F_2)\}$.

(2°) $f(x)=\dfrac{\rho(x,F_1)}{\rho(x,F_1)+\rho(x,F_2)}$,

$$U(F_1)=\left\{x\in X\mid f(x)<\frac{1}{2}\right\},$$

$$U(F_2)=\left\{x\in X\mid f(x)>\frac{1}{2}\right\}.$$

则 $U(F_1)$和 $U(F_2)$是 F_1 和 F_2 的不相交的邻域。

4. 证明 A_2 拓扑空间的子拓扑空间仍是 A_2 空间。具有可数稠密子集的拓扑空间的子拓扑空间仍具有可数稠密子集吗？

5. 证明可分度量空间的任一子度量空间仍是可分的。

6. 证明 §1 习题 5 中的 Hilbert 空间是 A_2 空间或可分度量空间。

7. 设(X,τ)为拓扑空间。

如果 X 的任意两个不同点中至少有一点有一个邻域，不包含另一点，则(X,τ)称为 T_0 空间。

如果 X 的任意两个不同点各有一个邻域，不包含另一点，则(X,τ)称为 T_1 空间。

正则的 T_1 空间称为 T_3 空间。

正规的 T_1 空间称为 T_4 空间。

证明 (1°) (X,τ)为 T_1 空间$\Longleftrightarrow$独点集是闭集。

(2°) T_4 空间$\Rightarrow T_3$ 空间$\Rightarrow T_2$ 空间$\Rightarrow T_1$ 空间$\Rightarrow T_0$ 空间。

(3°) 验证：多于二点的平庸拓扑空间不是 T_0 空间。

(4°) 验证：§2 例 3 是 T_0 空间，但不是 T_1 空间。

(5°) 验证：例 2 是 T_1 空间，但不是 T_2 空间。

(6°) 设 $X=\{a,b,c\}$，$\tau=\{\phi,\{a\},\{b,c\},X\}$，则$(X,\tau)$是正则和正规空间，但不是 T_0 空间(因而也不是 T_1,T_2 空间)。

8. (1°) 证明 T_2 空间的收敛点列的极限点是唯一的。

(2°) 举出一个 T_1 空间，其中一个收敛点列有两个不同的极限点。

9. 证明任一集合 X 有唯一的最小拓扑 τ(参看 §2 习题 7)，使得(X,τ)是 T_1 空间。

10. (1°) A_1(或 A_2、T_0、T_1、T_2、正则、正规)空间的子拓扑空间是否仍是 A_1(或 A_2、T_0、T_1、T_2、正则、正规)空间?

(2°) 两个 A_1(或 A_2、T_0、T_1、T_2、正则、正规)空间的积拓扑空间是否仍是 A_1(或 A_2、T_0、T_1、T_2、正则、正规)空间?

11. 设(X,τ)为拓扑空间,$A\subset X$,对于下面三个性质:

(1°) A 以 x 为聚点;

(2°) $A-\{x\}$中存在一个点列,收敛到点 x;

(3°) $A-\{x\}$中存在由完全不同的点所组成的一个点列,收敛到点 x.

证明 (3°)⇒(2°)⇒(1°).

12. 设(X,τ)为 A_1 空间,则

(1°) 对于 $x\in X$,存在 x 的一个可数拓扑基$\{V_n\}$,使得$V_{n+1}\subset V_n(n=1,2,\cdots)$.

(2°) 题 11 中的(1°)⇒(2°).

13. 设(X,τ)为 T_1 空间,则在题 11 中的(2°)⇒(3°).

14. 举例说明题 11 中的(1°)⇏(2°),(2°)⇏(3°).

15. 设(X,τ_1)为 A_1 空间,(Y,τ_2)为拓扑空间,$f:X\to Y$ 是映射. 如果对于 X 的每一点 x 以及 X 中收敛到点 x 的任一点列$\{x_n\}$,必有$\{f(x_n)\}$在 Y 中收敛到点$f(x)$,则f是连续映射.

举例说明条件 A_1 不能去掉.

16. 证明可数性(A_1、A_2)和分离性(T_0、T_1、T_2、T_3、T_4、正则和正规)都是拓扑性质.

17. 设 F_1 和 F_2 是度量空间(X,ρ)中的两个不相交的闭集,证明存在一个 X 上的连续函数f,使得

$$f|_{F_1}=0,\quad f|_{F_2}=1,\quad 0\leqslant f(x)\leqslant 1\quad (x\in X).$$

(提示:参看题 3)

18. 设(Y,τ_2)为 T_2 空间,而(X,τ_1)是由映射$f:X\to Y$诱导出来的拓扑空间,则

(X,τ_1)为 T_2 空间$\Longleftrightarrow f$是单射的(即一一映内的).

19. 设(X,τ_1)为拓扑空间,Y 为集合,且f: $X\to Y$ 是满映射,$\tau_2=\{G\mid f^{-1}(G)\in\tau_1\}$(参看 §4 习题 18). 如果$(X,\tau_1)$是 T_2 空间,(Y,τ_2)也是 T_2

空间吗？

研究例子：$X=R, Y=R/Q$（Q为有理数全体），

$$f: R\to R/Q,\quad x\to f(x)=[x].$$

§6 连 通 性

1. 连通

定义 1 设(X,τ)为拓扑空间，如果$X=A\cup B, A,B\in\tau, A\neq\phi, B\neq\phi, A\cap B=\phi$，则称 X 为**非连通**的拓扑空间.

如果 X 不是非连通的，就称它为**连通**的拓扑空间.

设$Y\subset X$，如果子空间(Y,τ_Y)是非连通的或连通的拓扑空间，则称Y为非连通的或连通的子集.

注 定义1中的"开集A、B"改为"闭集A、B"或"既开又闭的集合A、B"，则容易看出这三种定义是等价的（留作习题）.

拓扑空间(X,τ)是连通的$\Longleftrightarrow X$的子集中只有X和ϕ是既开又闭的(留作习题).

定理 1 设(X,τ)为拓扑空间，且$X=A\cup B$，A，$B\in\tau$，$A\cap B=\phi$. 如果Y是X的连通子集，则$A\cap Y=\phi$或$B\cap Y=\phi$.

证明 显然$Y=(A\cup B)\cap Y=(A\cap Y)\cup(B\cap Y)$，$A\cap Y\in\tau_Y, B\cap Y\in\tau_Y, (A\cap Y)\cap(B\cap Y)=\phi$.（反证）若$A\cap Y\neq\phi$, $B\cap Y\neq\phi$，则Y是非连通的，这与已知Y是X的连通子集相矛盾. #

定理 2 设$Y, Y_\alpha(\alpha\in\mu)$都是拓扑空间$(X,\tau)$的连通子集. 如果对任何$\alpha\in\mu, Y_\alpha\cap Y\neq\phi$，则$Y\cup(\bigcup_\alpha Y_\alpha)$是$X$的连通子集.

证明 （反证）若$Y\cup(\bigcup_\alpha Y_\alpha)$是非连通的，则$Y\cup(\bigcup_\alpha Y_\alpha)=A\cup B$，$A$和$B$是$Y\cup(\bigcup_\alpha Y_\alpha)$的两个非空不相交的开集. 由定理1，连通子集$Y\subset A$(或$\subset B$)，连通子集$Y_\alpha\subset A$(或$B$). 不妨设

$Y\subset A$，因为 $Y\cap Y_\alpha\neq\phi$，所以 $Y_\alpha\subset A(\alpha\in\mu)$。于是 $Y\cup(\bigcup_\alpha Y_\alpha)\subset A$，因此 $Y\cup(\bigcup_\alpha Y_\alpha)=A$．因而 $B=\phi$．这与上述 $B\neq\phi$ 相矛盾．#

定理 3 设 (X,τ) 为拓扑空间，Y 是 X 的连通子集，且 $Y\subset Y_1\subset\overline{Y}$，则 Y_1 也是连通的．特别地 $\overline{Y}$ 也是连通的。

证明 （反证）设 Y_1 非连通，因而 $Y_1=A\cup B$，这里 A，B 是 Y_1 的非空不相交的开子集．因为 Y 连通，由定理 1，$A\cap Y=\phi$ 或 $B\cap Y=\phi$．不妨设 $B\cap Y=\phi$，于是 $Y\subset A$。

由题设 $Y\subset Y_1\subset\overline{Y}$，则 Y_1-Y 中的每一点都是 Y 在 X 中的聚点．因为 $Y\subset A$，$B=Y_1-A\subset Y_1-Y$，所以非空集 B 的任一点 b 都是 Y 在 X 中的聚点．此外，由于 $Y\subset A\cup B=Y_1\subset X$，$b$ 也是 Y 在 Y_1 中的聚点．再由 $Y\subset A$，b 也是 A 在 Y_1 中的聚点，则 $b\in A$（A 是 Y_1 中的既开又闭的子集），$b\in A\cap B=\phi$，矛盾．#

例 1 Euclid 空间 R^n 是连通的．

（反证）若 R^1 非连通，于是 $R^1=A\cup B$，A，B 是 R^1 的非空不相交闭集．设 $a\in A$，$b\in B$．不妨设 $a<b$．显然 $A\cap[a,b]$ 和 $B\cap[a,b]$ 都是 R^1 的非空闭集．令 $\lambda=\inf(B\cap[a,b])$，容易看出 $\lambda\in\overline{B}=B$，且 $a<\lambda$（若 $a=\lambda\in B$，则 $a\in A\cap B=\phi$，矛盾）．此外，$\lambda_n=\lambda-\frac{\lambda-a}{n}\to\lambda(n\to+\infty)$，且 $\lambda_n\in A$，则 $\lambda\in\overline{A}=A$．于是 $\lambda\in A\cap B=\phi$，矛盾．

设 $Y=\{0=(0,\cdots,0)\}$，显然 Y 是连通的，对任何 $a\in R^n$，$a\neq0$，作过 0 和 a 的直线 $Y_a=\{ta\mid t\in R\}$，由上述可知 Y_a 是连通的．于是，从定理 2 推出 $R^n=Y\cup\left(\bigcup_{a\in R^n}Y_a\right)$ 也是连通的．

我们也可用反证法来证明 R^n 是连通的．若 R^n 是非连通的，于是 $R^n=A\cup B$，A，B 是 R^n 中非空不相交的闭集．设 $a\in A$，$b\in$

B，l 为连接 a 和 b 的直线，于是 $A\cap l$ 和 $B\cap l$ 是 l 的两个非空不相交闭集，这与上述直线 l 连通相矛盾。

例 2 (1°) 设$(X,\tau_{离散})$是多于二点的离散拓扑空间。由于 $X=\{a\}\cup(X-\{a\})$，$a\in X$，这里$\{a\}$和 $X-\{a\}$ 是X的两个不相交的非空开集，所以X是非连通的。

(2°) 设 $R^1_{有}=\{x\in R^1|x$ 为有理点$\}$。由于 $R^1_{有}=\{x\in R^1_{有}|x<\sqrt{2}\}\cup\{x\in R^1_{有}|x>\sqrt{2}\}$，所以 $R^1_{有}$是非连通的。

(3°) §2 例 5 中的X是非连通的。事实上，

$$X=\{x|-\infty<x<0\}\cup\{x|0\leqslant x<+\infty\}$$

$$=\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}[-n,0)\right)\cup\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}[0,n)\right),$$

它是两个不相交的非空开集的併。

定理 4 设(X,τ_1)和(Y,τ_2)为拓扑空间，$f:X\to Y$是连续映射。如果X是连通的，则 $f(X)$也是连通的(连通性在连续映射下是不变的)。

证明 $f(X)\subset Y$ 为Y的子拓扑空间。显然 $f:X\to f(X)$ 也是连续映射。(反证)设 $f(X)$是非连通的，则 $f(X)=A\cup B$，A 与 B 是 $f(X)$的非空不相交的开子集。由 f 连续，$f^{-1}(A)$与 $f^{-1}(B)$ 也是X的开子集，明显地，它们非空且不相交，又 $X=f^{-1}(A)\cup f^{-1}(B)$，这与$X$连通相矛盾。 #

注 由定理 4 得到连通性是拓扑性质。也可直接证明连通性和非连通性是拓扑性质。非连通性是连续映射下不变的吗？(留作习题)。

例 3 (1°) 由$f:(a,b)\to R^1$，$f(x)=\operatorname{tg}\dfrac{2x-(b+a)}{2(b-a)}\pi$ 是同胚映射以及 R^1 是连通的，所以 (a,b) 是连通的。类似地可证$(-\infty,a)$，$(a,+\infty)$是连通的。

(2°) 由$(a,b)\subset[a,b)\subset[a,b]=\overline{(a,b)}$ 及定理3可得到$[a,b)$和$[a,b]$是连通的. 类似地,$(-\infty,a]$,$[a,+\infty)$,$(a,b]$是连通的。

例 4　S^1与双纽线$Y=\{(x,y)\in R^2|(x^2+y^2)^2=x^2-y^2\}$是不同胚的. (反证)若存在同胚映射$f:S^1\to Y$, 则$f:S^1-\{f^{-1}(0,0)\}\to Y-\{(0,0)\}$也是同胚映射. 但$S^1-\{f^{-1}(0,0)\}$连通,而$Y-\{(0,0)\}$不连通(参看图 19),矛盾。

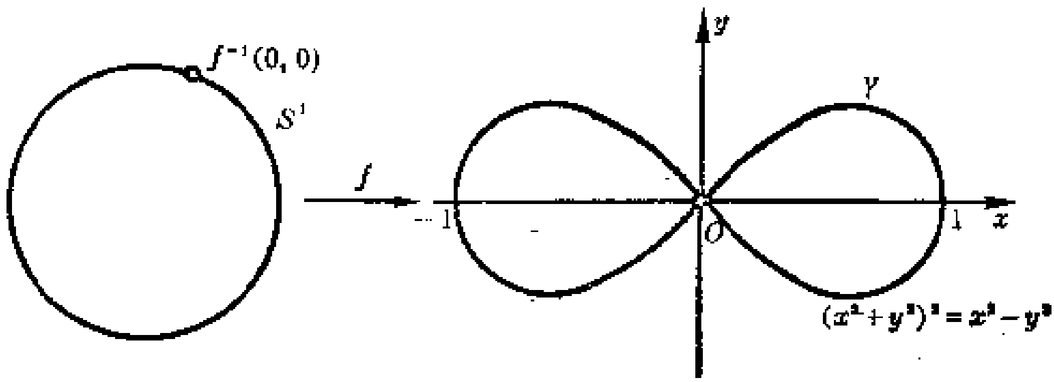


图 19

2. 道路连通

定义 2　设(X,τ)为拓扑空间, $p,q\in X$, $I=\{t|0\leqslant t\leqslant 1\}\subset R^1$. 如果连续映射$f:I\to X$使得$f(0)=p$, $f(1)=q$, 则f称为X中连接p与q的一条**道路**.

如果对于X的任意两点,在X中都有一条连接它们的道路,就称X为**道路连通**的。

例 5　X中一条道路指的是一个连续映射$f:I\to X$, 而不是象集$f(I)\subset X$. 可能有另一个连续映射$g:I\to X$, $g\neq f$, 但象集$g(I)=f(I)$. 这时f和g是连接$f(0)$和$f(1)$的两条不同的道路. 例如:

$$f:I\to X=I,\ \ f(t)=t,$$

$$g:I\to X=I,\ \ g(t)=\sin\frac{\pi}{2}t.$$

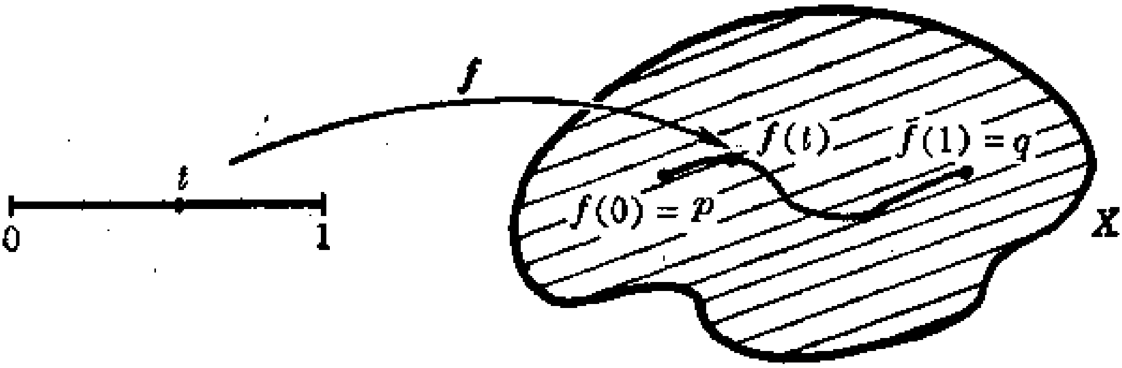


图 20

显然，$f\neq g$。但 $f(I)=g(I)=I$。

例 6 设 $A\subset R^n$，如果任何 $p,q\in A$，必有直线段 $(1-t)p+tq\in A(0\leqslant t\leqslant 1)$，则称 A 为 R^n 中的**凸集**。例如：R^n，R^n 中的 k 维子向量空间，R^n 中的开(或闭)的长方体，R^n 中开(或闭)的球体，R^1 中各种区间等都是凸集。

对于任何 $p,q\in A$，令 $f:I\to A$，$f(t)=(1-t)p+tq$。显然 f 是连结 p 和 q 的一条道路。因此，凸集 A 是道路连通的。

例 7 设 $S^n=\left\{x=(x_1,\cdots,x_{n+1})\,\middle|\,\sum\limits_{i=1}^{n+1}x_i^2=1\right\}$，对于任何 $p,q\in R^n$，取 p,q 所在的 2 维平面上的一个规范正交基 $\{e_1=p,e_2\}$，则 $q=\cos\theta\cdot e_1+\sin\theta\cdot e_2$，令 $f:I\to S^n$，

$$f(t)=\cos t\theta\cdot e_1+\sin t\theta\cdot e_2,$$

于是 f 是连接 p 与 q 的一条道路，所以 S^n 是道路连通的（参看图 21）。

定理 5 道路连通的拓扑空间(X,τ)是连通的。反之不成立。

证明 （反证）若 X 非连通，则 $X=A\cup B$，A，B 是 X 的非空不相交的开集。取 $a\in A$，$b\in B$。因为 X 是道路连通的，X 中存在连接 a 与 b 的一条道路 $f:I\to X$，$f(0)=a\in A$，$f(1)=b\in B$。于是

$$f(I)=f(I)\cap(A\cup B)=(f(I)\cap A)\cup(f(I)\cap B),$$

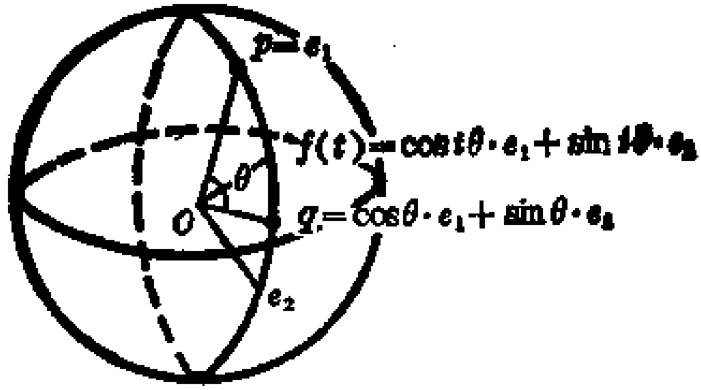


图 21

$$f(I)\cap A\neq\phi,\ f(I)\cap B\neq\phi,\ (f(I)\cap A)\cap(f(I)\cap B)$$
$$=f(I)\cap(A\cap B)=\phi.$$

即 $f(I)$是非连通的.另一方面,因为 I 是连通的,由定理 4, $f(I)$ 也是连通的,这就推出了矛盾.

反之不成立可参看例 8. #

注 由定理 5 可知例 1、3、6、7 中的拓扑空间都是连通的.

例 8 连通的拓扑空间不必是道路连通的.

设 $A=\left\{(x,\ y)\mid y=\sin\frac{1}{x},\ 0<x\leqslant\frac{2}{\pi}\right\}\subset R^2$,

$B=\{(0,y)\mid -1\leqslant y\leqslant 1\}\subset R^2$.

显然 $\overline{A}=A\cup B$. 因为 A 是$\left(0,\frac{2}{\pi}\right]$的连续象,由定理 4 它是连通的. 再由定理 3, $\overline{A}$ 也是连通的.

但 $\overline{A}$ 不是道路连通的. 事实上,设 $a\in A$, $b\in B$, $f:I\to\overline{A}$ 是任一映射,使得 $f(0)=a$, $f(1)=b$, 则 f 必不连续, 其证明如下.

(反证)若 $f(t)=(x(t),y(t))$连续. 令

$$t_1=\inf\{t\mid f(t)\in B\},$$

显然 $0<t_1$. 由 t_1 的定义,存在 $t_n\to t_1^+$. $f(t_n)\in B$. 于是

$$\lim_{t\to t_1}x(t)=x(t_1)=\lim_{n\to+\infty}x(t_n)=\lim_{n\to+\infty}0=0,$$

$$y(t_1)=\lim_{t\to t_1^-}y(t)=\lim_{t\to t_1^-}\sin\frac{1}{x(t)},$$

但明显地，当 $t\to t_1^-(x(t)\to 0)$ 时，右边的极限不存在（参看图 22），矛盾．

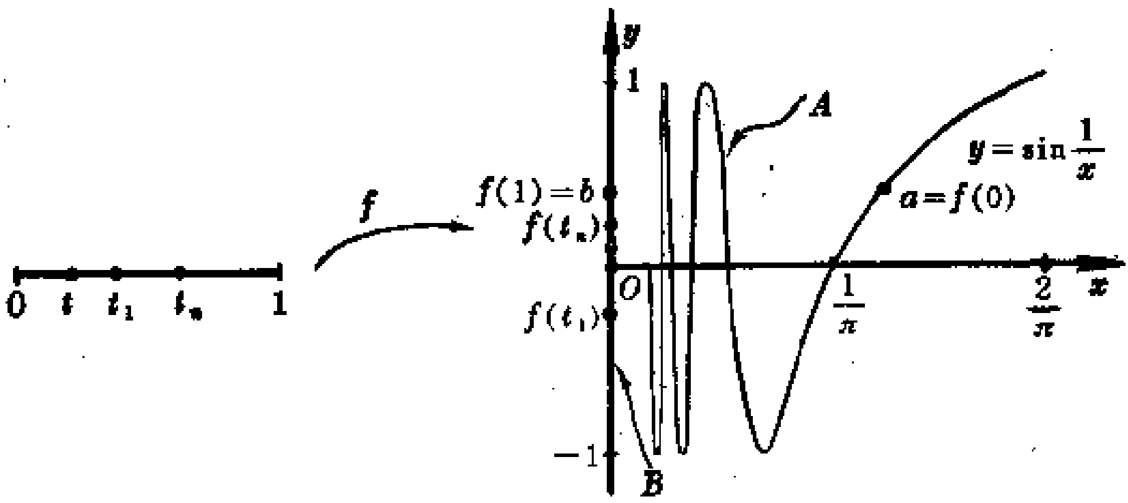


图 22

定理 6 设 (X,τ_1) 和 (Y,τ_2) 为拓扑空间，$f:X\to Y$ 是连续映射．如果 X 是道路连通的，则 $f(X)$ 也是道路连通的（道路连通性在连续映射下是不变的）．

证明 设 $p,\ q\in f(X)$．则存在 $a,\ b\in X$，使得 $f(a)=p$，$f(b)=q$．由于 X 是道路连通的，则存在连续映射 $\varphi:I\to X$，$\varphi(0)=a,\varphi(1)=b$．于是 $f\circ\varphi:I\to f(X)$，$f\circ\varphi(0)=p$，$f\circ\varphi(1)=q$ 就是 $f(X)$ 中连接 p 和 q 的一条道路．这就证明了 $f(X)$ 是道路连通的． #

3．连通分支

定义 3 设 (X,τ) 为拓扑空间，如果 A 是最大的连通子集（即 A 既是连通的，并且又不是 X 的另一连通子集的真子集），则称 A 为 X 的一个**连通分支**．

如果 A 是 X 的最大的道路连通子集，则称 A 为 X 的一个**道路**

连通分支.

定理 7 拓扑空间(X,τ)的每一个非空连通子集Y必落在一个连通分支中. X的每个连通分支都是X的闭集. 于是X划分成若干个两两不相交的连通分支.

证明 设C是包含Y的所有连通子集的併集. 由定理2、C是连通的. 如果D是X中包含C的连通子集，则D也是包含Y的连通子集，由C的取法可知$D\subset C$，所以$D=C$. 这就证明了C是一个连通分支.

X的每一个连通分支C是连通的，所以根据定理3，它在X中的闭包$\bar{C}$也是连通的. 由C的最大性推出$\bar{C}\subset C$，则$C=\bar{C}$是X的闭集.

设C_x是X中的含x的连通分支（它是所有含x的连通子集的併集）. 如果C_{x_1}和C_{x_2}相交，则由定理2推出$C=C_{x_1}\cup C_{x_2}$也是连通的. 再从C_{x_1}和C_{x_2}的最大性可知$C=C_{x_1}=C_{x_2}$. 因此，X的任何两个连通分支或者不相交或者重合. #

定理 8 拓扑空间(X,τ)的每一个非空道路连通子集Y必落在一个道路连通分支中. 于是X划分为若干个两两不相交的道路连通分支.

证明 设$C_x=\{y\mid$ 在X中存在连接x和y的道路$f\}$，则C_x是含x的一个道路连通分支.

因为$\varphi(u)=f(ut)$是连接$\varphi(0)=f(0)=x$和$\varphi(1)=f(t)$的一条道路，所以$f(t)\in C_x(0\leqslant t\leqslant 1)$.

对任何$y,z\in C_x$，设f是连接x和y的道路，g是连接x和z的道路. 则

$$h(t)=\begin{cases} f(1-2t), & 0\leqslant t\leqslant \dfrac{1}{2}, \\ g(2t-1), & \dfrac{1}{2}<t\leqslant 1, \end{cases}$$

是 C_x 中连接 y 和 z 的一条道路。

如果 D 是包含 C_x 的道路连通子集，则 x 与 D 中任一点都有一条道路相连，所以 $D\subset C_x$，从而有 $D=C_x$。这就证明了 C_x 是一个道路连通分支。

如果 Y 是一个非空道路连通子集，任取 $y\in Y$，显然 $Y\subset C_y$。

最后，如果 C_{x_1} 和 C_{x_2} 相交，$z\in C_{x_1}\cap C_{x_2}$，则对任何 $x\in C_{x_1}$，x 与 z 有道路相连接，所以 $x\in C_z$，$C_{x_1}\subset C_z$。而 C_z 是包含 C_{x_1} 的道路连通子集，于是 $C_{x_1}=C_z$。同理 $C_{x_2}=C_z$。这就证明了 C_{x_1} 与 C_{x_2} 或者不相交，或者重合。 #

例 9 (1°) R^1 上有理点(或无理点)所组成的子拓扑空间 $R^1_{有}$(或 $R^1_{无}$)的连通分支和道路连通分支都是独点集，是 R^1 的闭集但非开子集。

(2°) 例 8 中的拓扑空间 $X=A\cup B$，只有一个连通分支 $A\cup B$。但道路连通分支却有两个，即 A 和 B。其中 A 是 $A\cup B$ 的开子集但非闭子集，而 B 是闭子集但非开子集。

4. R^n 中的区域

定义 4 设 $A\subset R^n$，如果对任何 $p,q\in A$，必存在一条 A 中的折线 $pp_1p_2\cdots p_kq$ 连接 p 和 q（严格地说，存在一条连接 p 和 q 的连续曲线 f，而它的象集是 A 中的折线 $pp_1p_2\cdots p_kq$）。则称 A 为**折线连通**的(显然，折线连通⇒道路连通⇒连通)。

定理 9 设 $G\subset R^n$ 是开集，则

(1°) G 是折线连通的$\Longleftrightarrow$(2°) G 是道路连通的$\Longleftrightarrow$(3°) G 是连通的。

连通(或折线连通或道路连通)的开集 G 称为 R^n 中的**开区域**，而 $\overline{G}$ 称为**闭区域**。

证明 (1°)⇒(2°) 显然。

(2°)⇒(3°) 由定理 5 推出。

(3°)⇒(1°) 设 $G_x=\{y\,|\,在 G 中存在连接 x 和 y 的折线\}$。

类似于定理 8 的证明(只须将"道路连接"改为"折线连接")可以得到 G_x 是一个折线连通分支. 如果 Y 是一个非空折线连通子集,则对任何 $y\in Y$, 有 $Y\subset G_y$. 此外, G_x 和 G_y 或者不相交, 或者重合.

不难看出 G_x 是 R^n 的开集. 事实上, 对任何 $p\in G_x$, 由于 G 是开集, 存在球形邻域 $U(p,\varepsilon)\subset G$, 而对任何 $q\in U(p,\varepsilon)$ 有直线段连接 p 和 q, 所以有折线将 x 和 q 相连, 即 $q\in G_x$, $U(p,\varepsilon)\subset G_x$ (参看图 23).

如果 $G_x\neq G(x\in G)$, 则 $G=G_x\cup\left(\bigcup_{Y\in G-G_x} G_Y\right)$. 因此 G 可表示为两个非空不相交的开集的併集, 这与 G 连通相矛盾. 于是 $G_x=G$, 即 G 是折线连通的. #

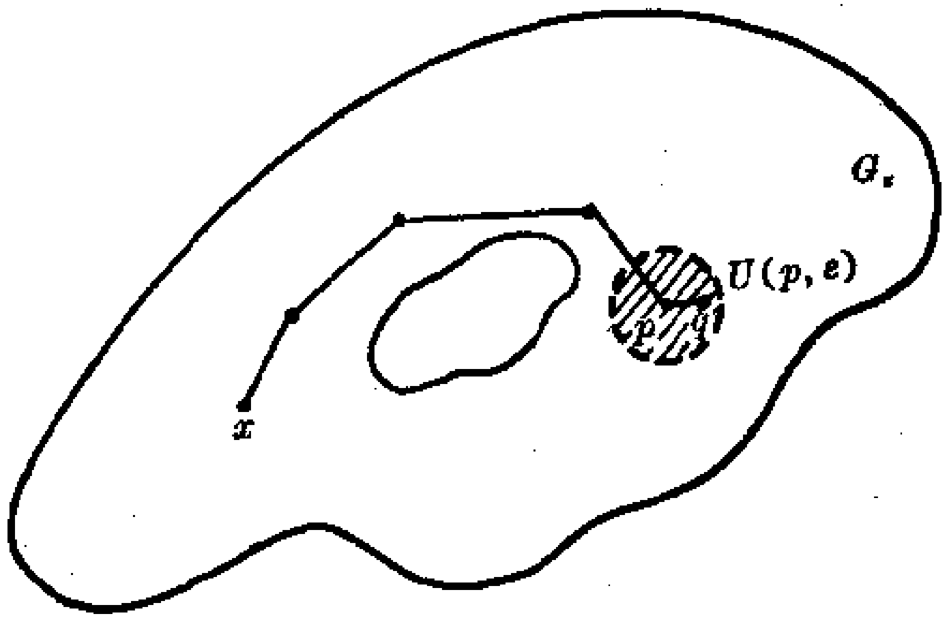


图 23

§6 习 题

1. 证明定义 1 下面的注.
2. 证明定理 4 后面的注.

3．设(X,τ)为拓扑空间，Y是X的道路连通子集，$\{y_\alpha\}$是X的一族道路连通子集，$Y_\alpha\cap Y\neq\phi(\alpha\in\mu)$，则$Y\cap\left(\bigcup_\alpha Y_\alpha\right)$是道路连通的。

4．定理3中的"连通"改为"道路连通"，结论是否还成立？举例说明．

5．设(X,τ)为拓扑空间，$x,y\in X$，如果存在连续映射$f:I\to X$，使得$f(0)=x$，$f(1)=y$，则称$x\sim y$.

证明："$\sim$"具有等价关系的三个性质：

(1°) $x\sim x$（反身性）；(2°) $x\sim y\Rightarrow y\sim x$（对称性）；(3°) $x\sim y$，$y\sim z\Rightarrow x\sim z$（传递性）。

6．（介值定理）设(X,τ)为连通的拓扑空间，$f:X\to R$是连续函数。对于任何$x_0,x_1\in X$，$f(x_0)\leqslant c\leqslant f(x_1)$，则必存在一点$\xi\in X$，使得$f(\xi)=c$。

7．证明R^1中包含至少两个点的连通子集必为一个区间（开、闭、半开半闭、有限或无穷）。

8．证明 (1°) $R^n-\{p\}(n>1,p\in R^n)$是折线连通的。

(2°) R^1中的有理点全体$R^1_{有}$和无理点全体$R^1_{无}$都是非连通的。

(3°) $R^n(n>1)$中有理点（n个坐标全是有理数）的全体$R^n_{有}$是非连通的．$R^n(n>1)$中无理点（至少有一个坐标是无理数）的全体$R^n_{无}$是折线连通的．

(4°) 设$A\subset R^n$是至多可数的集合，则$B=R^n-A\ (n>1)$是道路连通的。B是折线连通的吗？

9．证明：拓扑空间(X,τ)是非连通的$\Longleftrightarrow$存在一个连续映射$f:X\to R$，使得$f(X)$恰是R上两个不同的值．

10* 设$G\subset R^n$是开区域，则闭区域$\bar{G}$也是连通的。$\bar{G}$是道路连通的吗？试举反例。

11．例8中的$X=A\cup B$的折线连通分支是什么？

12．证明：如果X是无限集合，而τ是X上的使得(X,τ)是T_1空间的最小拓扑（§5习题9），则(X,τ)是连通的。

13．(1°) 证明：多于二点的离散拓扑空间是非连通的。

(2°) 离散拓扑空间的道路连通分支和连通分支是什么？

(3°) 证明：平庸拓扑空间是连通的。是道路连通的吗？

14．§2例6中的拓扑空间(X,τ)是连通的吗？是道路连通的吗？说明

理由。

15. 利用"连通性是拓扑性质"证明

(1°) R^1 上任一区间与圆 S^1 是不同胚的。

(2°) R^1 上的闭区间，开区间，半开半闭区间是彼此不同胚的。

(3°) R^1 与 R^2 是不同胚的。

(4°) S^1 与 S^2 是不同胚的。

(5°)* Möbius 带（参看 § 4 习题 18）与圆环 $\{(x,y)\in R^2 | 1<x^2+y^2<4\}$ 是不同胚的。

16. 证明 (1°) 空集是连通的，是道路连通的。

(2°) 独点集的拓扑空间是连通的，是道路连通的。

(3°) $X=\{a,b,c\}$，$\tau=\{X;\{a,b\},\{a,c\},\{a\},\phi\}$，则拓扑空间 (X,τ) 是连通的．是道路连通的吗？

§ 7 列紧和紧致（覆紧）

1. 列紧和紧致（覆紧）

定义 1 设 (X,τ) 为拓扑空间，如果 X 的每一无限子集至少有一个聚点（不必属于此无限子集），则称 (X,τ)（或拓扑空间 X）为**列紧**的．

拓扑空间 (X,τ) 的一个子集 Y 称为**列紧**的，如果 Y 作为子拓扑空间 (Y,τ_Y) 是列紧的（即 Y 的每一无限子集有一聚点属于 Y）。

定义 2 设 (X,τ) 为拓扑空间，如果对于 X 的每一个开覆盖 η 必有一个有限的（开）子覆盖 η'，则称 (X,τ)（或拓扑空间 X）为紧致的或**覆紧**的。

定理 1 拓扑空间 (X,τ) 是紧致的 $\Rightarrow (X,\tau)$ 是列紧的．反之不成立．

证明 （反证）若 X 不列紧，即存在 X 的无限子集 A，使 $A'=\phi$．于是 $\bar{A}=A\cup A'=A$ 是闭集，$X-A$ 是开集．此外，由于任何

$a\in A$，$a\overline{\in}A'=\phi$，故存在 a 的邻域 $U(a)$，使得 $U(a)\cap(A-\{a\})=\phi$。于是 $\{X-A, U(a)\mid a\in A\}$ 是 X 的一个开覆盖，但显然无有限的子覆盖，这与 X 是紧致的相矛盾。反之不成立可参看例 1。 #

例 1 列紧⇏紧致。

设 $X=\{n\mid n=1,2,3,\cdots\}$，$\tau_*=\{B_n=\{2n-1,2n\}\mid n=1,2,3,\cdots\}$。容易验证 τ_* 是一个拓扑基，由 τ_* 诱导出拓扑空间 (X,τ)。

X 是列紧的。事实上，对每个自然数 n，点 $2n$ 是独点集 $\{2n-1\}$ 的聚点，而点 $2n-1$ 是独点集 $\{2n\}$ 的聚点。因而 X 的每个非空子集至少有一个聚点。

但 X 不是紧致的。因为 τ_* 是 X 的一个可数无限开覆盖，而它不包含有限的子覆盖。

定理 2 紧致（或列紧）拓扑空间 (X,τ) 的任一闭子集 Y 是紧致的（或列紧的）。

证明 设 $\eta_Y=\{G_\alpha\cap Y\in\tau_Y\mid G_\alpha\in\tau\}$ 是 Y 的任一开覆盖。因为 Y 是 X 的闭子集，$X-Y$ 是开集，所以 $\eta=\{G_\alpha, X-Y\}$ 是 X 的一个开覆盖。由于 X 紧致，必有一个有限的子覆盖 $\eta'=\{G_1,\cdots,G_k\}$。于是 $\eta'_Y=\{G_i\cap Y\mid G_i\in\eta'\}$ 是 η_Y 的有限子覆盖。这就证明了 Y 也是紧致的。

考虑任一无限子集 $A\subset Y\subset X$。由 X 列紧，存在 $a\in A'\subset X$，则 $a\in\overline{A}\subset\overline{Y}=Y$（在 X 中的闭包，且 Y 是 X 中的闭集）。这就证明了 Y 是列紧的。 #

注 如果拓扑空间 (X,τ) 的子集 Y 作为子拓扑空间 (Y,τ_Y) 是紧致的，则称 X 的子集 Y 为紧致的。容易证明：

Y 是紧致的 $\Longleftrightarrow$ 对于 Y 的在 X 中的每个开覆盖 $\eta(\subset\tau)$ 必有一个有限的子覆盖 η'（留作习题）。用此结论重新证明定理 2 中的前半部分（留作习题）。

2. 度量空间(X,ρ)中的列紧和紧致

设(X,τ)为(X,ρ)所诱导的拓扑空间。

定理 3 X(或(X,ρ))是列紧的$\Longleftrightarrow X$中的每个点列必有收敛的子点列。

证明 ($\Rightarrow$) 设$\{x_n\}$是X中的任一点列. 如果它有一个子点列$x_{n_k}=x(k=1,2,\cdots)$,则显然$\lim\limits_{k\to+\infty}x_{n_k}=x$. 如果它无完全相同的点组成的子点列,则$\{x_n\}$有完全不同的点所组成的一个子点列$\{y_n\}$. 由于$X$列紧,无限子集$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\{y_n\}$有一个聚点$a$,再从§3定理6,$\{y_n\}$有一个子点列收敛于$a$,当然,它也是$\{x_n\}$的收敛于$a$的子点列.

($\Leftarrow$) 设$A\subset X$是任一无限子集,作A的由完全不同的点所组成的一个点列$\{x_n\}$. 由于$\{x_n\}$有一个子点列$\{y_n\}$收敛于点$a\in X$. 根据§3定理6,子集$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\{y_n\}$以$a$为聚点,于是$A$也以$a$为聚点. #

定理 4 设(X,ρ)是列紧度量空间,$\eta=\{G_\alpha\}$是X的一个开覆盖,则存在一个正数$\lambda=\lambda(\eta)$(称为覆盖η的一个Lebesque数)具有性质:如果$A\subset X$,且当直径

$$d(A)=\begin{cases}0, & \text{当 } A=\phi,\\ \sup\{\rho(x,y)\mid x,y\in A\}, & \text{当 } A\neq\phi.\end{cases}$$

$<\lambda$时,至少有一个$G_\alpha\supset A$,$G_\alpha\in\eta$.

证明 (反证)假设具有上述性质的λ不存在,则对任何自然数n,存在$A_n\subset X$,$d(A_n)<\frac{1}{n}$,且对任何$G_\alpha\in\eta$,$A_n\not\subset G_\alpha$. 任取$a_n\in A_n(n=1,2,\cdots)$,因为X列紧,由定理3,点列$\{a_n\}$有一个子点列$\{a_{n_k}\}$收敛于$a\in X$. 由于η是X的开覆盖,存在$G\in\eta$,使得

$a\in G$. 因为 G 是开集，所以 $d=\rho(a,X-G)>0$。

我们取自然数 $m>\frac{2}{d}$，且使 $a_m\in\{a_{n_k}\}$，$\rho(a,a_m)<\frac{d}{2}$. 于是，对任何 $x\in A_m$，有

$$\rho(a,x)\leqslant\rho(a,a_m)+\rho(a_m,x)<\frac{d}{2}+\frac{1}{m}<\frac{d}{2}+\frac{d}{2}=d.$$

所以 $A_m\subset G$，这与 $A_m\not\subset G_\alpha$(对任何 $G_\alpha\in\eta$)相矛盾． #

引理 1 设 (X,ρ) 为列紧度量空间．对于任何 $\varepsilon>0$，X 必有 ε 网 A(即 A 是 X 的有限集，并且对任何 $x\in X$，有 $\rho(x,A)<\varepsilon$)。

证明 (反证) 若存在某个 $\varepsilon_0>0$，X 无 ε_0 网。任取 $a_1\in X$。因为 $\{a_1\}$ 不是 X 的 ε_0 网，则有 $a_2\in X$，使 $\rho(a_1,a_2)\geqslant\varepsilon_0$。设 $\{a_1,\cdots,a_n|n>1\}$ 已取定，其中 $\rho(a_i,a_j)\geqslant\varepsilon_0(1\leqslant i<j\leqslant n)$。因为 $\{a_1,\cdots,a_n\}$ 不是 X 的 ε_0 网，则有 $a_{n+1}\in X$，使得 $\rho(a_i,a_j)\geqslant\varepsilon_0$ $(1\leqslant i<j\leqslant n+1)$. 这样就得到一个无限子集 $\{a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots\}$，其中 $\rho(a_i,a_j)\geqslant\varepsilon_0(1\leqslant i<j)$. 由 §3 例 3 可知这无限子集无聚点，这与 X 是列紧相矛盾． #

定理 5 设 (X,ρ) 为度量空间，则

X 是紧致的 $\Longleftrightarrow$ X 是列紧的．

证明 ($\Rightarrow$) 由定理 1 即可推出。

($\Leftarrow$) 设 η 是 X 的任一开覆盖，$\lambda=\lambda(\eta)$ 是开覆盖 η 的 Lebesgue 数. 由引理 1，X 有一个 $\frac{\lambda}{3}$ 网 $\{a_1,\cdots,a_n\}$。于是，$X=\bigcup_{k=1}^{n}U\left(a_k,\frac{\lambda}{3}\right)$. 因为 $d\left(U\left(a_k,\frac{\lambda}{3}\right)\right)<\lambda$，由定理 4，存在 $G_k\in\eta$，使得 $U\left(a_k,\frac{\lambda}{3}\right)\subset G_k(k=1,2,\cdots,n)$。于是 $\{G_1,G_2,\cdots,G_n\}$ 就是所求的 η 的有限子覆盖． #

定理 6 设 (X,ρ) 为度量空间。

A 是 X 的列紧子集⇒A 是 X 的有界闭集．反之不成立．

证明 先证 A 有界．（反证）如果 A 无界，则有 $B\subset A$，使得对任何 $b_1,b_2\in B$，有 $\rho(b_1,b_2)>1$．由§3 例 3，$B'=\phi$，这与 A 列紧相矛盾．

再证 A 是闭集．只须证 $A'\subset A$．若 $a\in A'$ （当 $A'=\phi\subset A$ 时，A 显然是闭集），从§3 定理 6，$A-\{a\}$中存在一个由完全不同的点所组成的点列$\{x_n\}$，$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=a$．于是 A 的无限子集$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\{x_n\}$以 a 为唯一的聚点．由 A 列紧，$a\in A$． ♯

例 2 R^1 中子度量空间 $A=(0,1)$，它作为一个度量空间，A 自身是一个有界闭集，但不列紧．

3．紧致拓扑空间的连续映射

定理 7 设(X,τ_1)为紧致拓扑空间，(Y,τ_2)为拓扑空间，$f:X\to Y$ 是连续映射．则 $f(X)$是 Y 的紧致子集（紧致性是连续映射下的不变性质，当然也是拓扑性质）．

证明 $f(X)$视作(Y,τ_2)的子拓扑空间， 显然 $f:X\to f(X)$ 也是连续映射．设 $\eta=\{V_\alpha\}$是 $f(X)$的任一开覆盖．由§4 定理 1，$f^{-1}(V_\alpha)$是 X 的开集．显然，$\{f^{-1}(V_\alpha)\}$是 X 的一个开覆盖．因为 X 紧致，$\{f^{-1}(V_\alpha)\}$有一个有限的子覆盖

$$\{f^{-1}(V_{\alpha_k})\,|\,k=1,\cdots,n\}.$$

由于 $ff^{-1}(V_\alpha)=V_\alpha$，所以

$$\{V_{\alpha_k}\,|\,k=1,\cdots,n\}$$

是 $f(X)$的一个有限开覆盖，它是 η 的有限子覆盖．这就证明了 $f(X)$是 Y 的紧致子集． ♯

例 3 容易证明列紧性是拓扑性质．但是，列紧性不是连续映射下的不变性质．举反例如下：

设(X,τ_1)为例 1 中的列紧拓扑空间，(Y,τ_2)为 R^1 的子拓扑

空间，这里 $Y=\{n\mid n=1,2,\cdots\}$。令 $f: X\to Y$，$f(2n-1)=f(2n)=n$。则 f 是连续映射，但 $f(X)=Y$ 不列紧。

引理 2 (1°) 设 (X,τ) 为 T_2 空间。则

A 是 X 的紧致子集 $\Rightarrow A$ 是 X 的闭集。

(2°) 设 (X,τ) 是紧致的 T_2 空间。则

A 是 X 的紧致子集 $\Longleftrightarrow A$ 是 X 的闭集。

证明 (1°) 对任何 $p\in X-A$。因为 X 是 T_2 空间，所以对任何 $x\in A$，存在 p 的邻域 $U(p, x)$ 和 x 的邻域 $V(x)$，使得 $U(p,x)\cap V(x)=\phi$。显然，$\{V(x)\mid x\in A\}$ 是 A 的在 X 中的一个开覆盖。由 A 紧致，它有一个有限的子覆盖 $\{V(x_k)\mid k=1,\cdots,n\}$，令

$$U(p)=\bigcap_{k=1}^{n}U(p_k,x_k).$$

易见，$U(p)$ 是 p 的邻域，且 $U(p)\cap V(x_k)=\phi$，所以

$$U(p)\cap A\subset U(p)\cap\left(\bigcup_{k=1}^{n}V(x_k)\right)=\bigcup_{k=1}^{n}(U(p)\cap V(x_k))=\phi.$$

于是 $p\in U(p)\subset X-A$，即 $X-A$ 是开集，A 是 X 的闭集。

(2°) ($\Rightarrow$) 由(1°)即得。

($\Leftarrow$) 由定理 2，紧致拓扑空间 X 的闭子集 A 是紧致的.

#

定理 8 设 (X,τ) 为紧致拓扑空间，$f: X\to R^1$ 是任一连续函数，则 f 有界。而且存在 $x_1,x_2\in X$，使得

$f(x_1)=\inf\{f(x)\mid x\in X\}$ (因而达到最小值)，

$f(x_2)=\sup\{f(x)\mid x\in X\}$ (因而达到最大值)。

证明 由定理 7，$f(X)$ 是 R^1 上的紧致子集，再由定理 5 和 6，$f(X)$ 是 R^1 上的有界闭集，所以 f 有界。而且存在 $x_1,x_2\in X$，使得

$$f(x_1)=\inf\{f(x)\mid x\in X\}=\min\{f(x)\mid x\in X\},$$

$$f(x_2)=\sup\{f(x)\mid x\in X\}=\max\{f(x)\mid x\in X\}. \qquad \#$$

定理 9 设(X,τ_1)为紧致拓扑空间，(Y,τ_2)是T_2空间，f：$X\to Y$是连续映射，则f是**闭映射**(即如果$A\subset X$是闭集，则$f(A)\subset Y$也是闭集)。

证明 设$A\subset X$是任何闭集，由定理2，A是X的紧致子集。由定理7，$f(A)$是Y的紧致子集。再根据引理2，$f(A)$是Y的闭子集。 #

例 4 定理8和9中的"紧致"改为"列紧"，结论不成立。

设(X,τ)为例1中的列紧拓扑空间。

(1°) $Y=R^1$。令

$$f(2n-1)=f(2n)=\begin{cases} n, & \text{当 } n \text{ 为偶数},\\ -n, & \text{当 } n \text{ 为奇数}.\end{cases}$$

容易看出f连续。但无上界和下界，当然达不到最大值，也达不到最小值。

(2°) $Y=[0,1]$。令

$$f(2n-1)=f(2n)=1-\frac{1}{n}$$

显然，f连续。但$f(X)$不是$Y=[0,1]$的闭子集。

定理 10 设(X,τ_1)为紧致拓扑空间，(Y,τ_2)是T_2空间，f：$X\to Y$是一一映上的连续映射，则f是同胚映射。

证明 由于f是一一映上的，则$f(X)=Y$，且有逆映射f^{-1}：$Y\to X$。设$A\subset X$为任一闭集，由定理9，$(f^{-1})^{-1}(A)=f(A)\subset Y$为闭集，所以$f^{-1}$是连续映射，从而$f$是同胚映射。 #

定理 11 设(X,ρ_1)为列紧(也是紧致)的度量空间，(Y,ρ_2)为度量空间。f：$X\to Y$是连续映射，则f是**一致连续映射**(即对任何$\varepsilon>0$，存在$\lambda>0$，当$\rho_1(x',x'')<\lambda$时，必有$\rho_2(f(x'),f(x''))<\varepsilon$)。

证 1 任何 $\varepsilon>0$，因为 f 是连续映射，对任何 $x\in X$，存在 $\delta(x)>0$，当 $x'\in U(x,\delta(x))$ 时，$\rho_2(f(x'),f(x))<\frac{\varepsilon}{2}$。由定理 4，$X$ 的开覆盖 $\{U(x,\delta(x))\mid x\in X\}$ 有一个 Lebesque 数 λ。如果 $\rho_1(x',x'')<\lambda$，则存在 $x\in X$，使得 $x',x''\in U(x,\delta(x))$。于是

$$\rho_2(f(x'),f(x''))\leqslant\rho_2(f(x'),f(x))+\rho_2(f(x''),f(x))<$$

$$\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

证 2 （反证）若 f 非一致连续，则有 $\varepsilon_0>0$，相应的 λ 不存在。特别当 $\lambda_n=\frac{1}{n}$ 时，必有 x'_n，$x''_n\in X$，$\rho_1(x'_n,x''_n)<\frac{1}{n}$，但 $\rho_2(f(x'_n),f(x''_n))\geqslant\varepsilon_0$。因为 (X,ρ_1) 列紧，由定理 3，$\{x'_n\}$ 必有收敛于 x_0 的子点列，为方便起见，仍记为 $\{x'_n\}$。由

$$0\leqslant\rho_1(x''_n,x_0)\leqslant\rho_1(x''_n,x'_n)+\rho_1(x'_n,x_0)$$

$$<\frac{1}{n}+\rho_1(x'_n,x_0)\to0\,(n\to+\infty)$$

可知 $x''_n\to x_0$。因为 f 在 x_0 连续，所以 $f(x'_n)\to f(x_0)$，$f(x''_n)\to f(x_0)$。于是存在 N，$n>N$，有

$$\varepsilon_0\leqslant\rho(f(x'_n),f(x''_n))\leqslant\rho(f(x'_n),f(x_0))$$

$$+\rho(f(x''_n),f(x_0))<\frac{\varepsilon_0}{2}+\frac{\varepsilon_0}{2}=\varepsilon_0,$$

这就推出了矛盾。　　#

§7 习　题

1．证明定理 2 后的注。

2．证明定理 3 中的充分性对拓扑空间 (X,τ) 仍成立，但必要性并不成立，研究例 1。

3．指出下列子集哪些是列紧的（或紧致的），

(1°) R^1 中的 $[a,b]$，(a,b)，$(a,b]$，$[a,b)$，$(-\infty,+\infty)$，$[0,+\infty)$，

$\left\{\frac{1}{n}\middle| n=1,2,\cdots\right\}$, $\left\{0,\frac{1}{1},\frac{1}{2},\cdots,\frac{1}{n},\cdots\right\}$, § 3 习题第 15 题中的 Cantor 集。

(2°) R^2 中的 $R^1=\{(x,0)|x\in R\}$, $\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 1\}$, $\{(x,y)|x^2+y^2<1\}$, $\{(x,y)|1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\}$。

4. (1°) 证明§ 1 习题第 5 题中的 Hilbert 空间 X 的基本方体 $J=\{(x_1,\cdots,x_n,\cdots)|0\leqslant x_n\leqslant\frac{1}{n}\}$ 是 X 的列紧子集。

(2°) 证明：$X-J$ 在 X 中稠密。

5. (1°) 设 (X,τ) 为拓扑空间，X 是有限集，则 X 的任何子集都是紧致的。

(2°) 拓扑空间 (X,τ) 的紧致子集一定是闭集吗？举例说明。

(3°) 证明 $(X,\tau_{平庸})$ 的任何子集都是紧致的。如果 X 多于两点，举出 X 的紧致子集但不是闭集的例子。

(4°) § 2 例 6 中的拓扑空间 (X,τ) 是否是列紧的？是否是紧致的？

(5°) § 3 例 6 中的 (X,τ) 是列紧的吗？

6. 证明：R^n 中的子集 A 是列紧的 $\Longleftrightarrow$ A 是 R^n 的有界闭集。

(充分性采用数学分析中的 Bolzano-Weierstrass 定理和 Borel 定理的两种证明方法。)

7. (1°) 证明 $[0,1)$ 对任何 $\varepsilon>0$，有 ε 网，但它不是列紧的。

(2°) 证明列紧度量空间具有可数球形邻域族的拓扑基（因而是 A_2 空间，是可分的度量空间）。

8. 定义 1 中，证明"每一无限子集有一聚点" $\Longleftrightarrow$ "每一可数无限子集有一聚点"。

9. (1°) 设 (X,ρ) 是列紧度量空间，$\mathscr{F}=\{F_\alpha\}$ 是 X 的一族闭集，且 $\bigcap_\alpha F_\alpha=\phi$。则存在正数 $\lambda=\lambda(\mathscr{F})$，使得任何 $A\subset X$，直径 $d(A)<\lambda$，必有某个 F_{α_0}，$A\cap F_{\alpha_0}=\phi$。

(2°) 设 X 是 R^2 中的 $\triangle ABC$ (R^2 中的闭区域)，$\mathscr{F}=\{$闭直线段 AB, BC, $CA\}$，试求(1°) 中的 $\lambda=\lambda(\mathscr{F})$。

如果 $\eta=\{G_1=X-AB,\ G_2=X-BC,\ G_3=X-CA\}$，试求定理 4 中的

$\lambda(\eta)$.

(3°) 在(1°)中，证明：存在一个正数 $\mu=\mu(\mathscr{L})$，使得 X 的任一点 x，至少存在一个 $F_\alpha\in\mathscr{L}$，有 $\rho(x,F_\alpha)\geqslant\mu$.

(4°) 设 $\mathscr{L}=\{F_1,\cdots,F_k\}$ 是列紧度量空间 (X,ρ) 的一族有限个闭集，证明存在一个正数 $\sigma=\sigma(\mathscr{L})$，具有以下性质：如果 X 的子集 A，$d(A)<\sigma$，且交 $\mathscr{L}$ 中的元素 $F_{i_1},\cdots,F_{i_k}$，则 $F_{i_1}\cap\cdots\cap F_{i_k}\neq\phi$.

10. 证明：(X,τ) 是紧致拓扑空间 $\Longleftrightarrow$ (X,τ) 的任一闭集族 $\mathscr{L}=\{F_\alpha\}$，$\bigcap\limits_\alpha F_\alpha=\phi$，则 $\mathscr{L}$ 有一个非空的有限子族 $\{F_{\alpha_1},\cdots,F_{\alpha_n}\}$，使得 $\bigcap\limits_{k=1}^{n} F_{\alpha_k}=\phi$.

11. 在 R^n 中构造开子集 G_k，使得 $\bar{G}_k$ 是紧致的，且

$$G_1\subset\bar{G}_1\subset G_2\subset\bar{G}_2\subset G_3\subset\cdots,\quad \bigcup_{k=1}^{+\infty} G_k=R^n.$$

12. 设 (X,τ) 为 A_2，T_1 空间，则

(X,τ) 紧致 $\Longleftrightarrow$ (X,τ) 列紧.

13. 证明：T_2 拓扑空间 (X,τ) 的两个紧致子集的交集是紧致的.

14. 设 (X_1,τ_1) 和 (X_2,τ_2) 为拓扑空间. 证明：积拓扑空间 $X_1\times X_2$ 紧致 $\Longleftrightarrow$ X_1 与 X_2 都是紧致的.

15. 如果 (X,ρ_1) 为列紧度量空间，(Y,ρ_2) 为度量空间，$f:X\to Y$ 是连续映射，则 $f(X)$ 是 Y 的列紧子集.（利用定理 3 和定理 5、7 两种方法.）

16. 设 (X,ρ) 为度量空间，$A,B\subset X$ 是列紧（或紧致）子集，且 $A\cap B=\phi$. 证明：存在 $a\in A$，$b\in B$，使得 $\rho(A,B)=\rho(a,b)>0$.

再讨论下列三种情形：

(1°) A 是列紧子集，B 是闭集.

(2°) A 和 B 都是 R^n 中的闭集.

(3°) A 是 R^n 中的列紧子集，B 是 R^n 中的闭集.

17. 设 $A\subset R^n$ 是凸集. 证明

(1°) 若 $p\in\bar{A}$，$q\in A^\circ$，则 $(1-\lambda)p+\lambda q\in A^\circ$ $(0<\lambda\leqslant1)$.

(2°) A°，$\bar{A}$ 都是凸集.

如果 $A\subset B\subset\bar{A}$，问 B 是凸集吗？

18*. 设 G_1 是 R^n 中的有界闭凸集，G_2 是 R^n 中的闭凸集，$G_1\cap G_2=\phi$.

证明必存在一个超平面 π 将 G_1 和 G_2 严格分开。

19*. 设 $G\subset R^n$ 是开区域(连通开集). 则

(1°) G 是凸域 $\Longleftrightarrow$ (2°) 任何 $p\in\partial G$(边界点集), 必存在局部的支持超平面 π_p(即在 p 的某个邻域内, $\pi_p\cap G=\phi$) $\Longleftrightarrow$ (3°) 任何 $p\in\partial G$, 必存在整体的支持超平面(即 $\pi_p\cap G=\phi$)。

20. 设 $A\subset R^n$ 是有界闭凸域(凸域的闭包)。则 A 同胚于闭单位球 $\{x\in R^n\,|\,\|x\|\leqslant 1\}$。

21. 利用"紧致和列紧是拓扑性质"证明

(1°) R^1 中的 (a,b) 与 $[a,b]$ 是不同胚的。

(2°) R^n 与 S^n 是不同胚的。

第二章　流形和 Stokes 定理

通过在球面 S^2 上建立局部坐标系这个具体例子，我们引进微分流形这一极其重要的概念，然后，在微分流形的每一点处定义切向量，切空间，张量和张量空间，从而使流形代数化。

为了证明 Stokes 定理，我们叙述了外微分形式、外微分运算、1 的分解以及第二型积分，特别是流形M的定向和 ∂M 的诱导定向的问题，它是 Stokes 定理的一个不可缺少的重要部分。

最后，我们还引进了 Riemann 流形M上的第一型积分，第二型积分以及长度，面积和体积等概念。这些内容都是 n 维 Euclid 空间 R^n 中相应的微积分内容的推广。

§ 1　反函数和隐函数定理

1. 映射的 Jacobi 式

定义 1　设U为 R^n 中的开集，映射 $F:U\to R^n$, $F(x^1,\cdots,x^n)=(y^1,\cdots,y^n)$, $(x^1,\cdots,x^n)\in U$ (x^i 为第 i 个坐标)，

$$\begin{cases} y^1=F_1(x^1,\cdots,x^n), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y^n=F_n(x^1,\cdots,x^n), \end{cases}$$

其中 F_i 在U中有关于 $x^1,\cdots,x^n$ 的连续偏导数，则称行列式

$$\det\left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right)=\begin{vmatrix} \frac{\partial y^1}{\partial x^1}\cdots\frac{\partial y^1}{\partial x^n} \\ \cdots\cdots \\ \frac{\partial y^n}{\partial x^1}\cdots\frac{\partial y^n}{\partial x^n} \end{vmatrix}$$

为映射F的 Jacobi 式。有时也记为

$$\frac{\partial(y^1,\cdots,y^n)}{\partial(x^1,\cdots,x^n)}, \quad \frac{\partial(F_1,\cdots,F_n)}{\partial(x^1,\cdots,x^n)}.$$

定理 1 设 F 如定义 1 中所述，V 是 R^n 中的开集，映射 G：$V\to R^n, F(U)\subset V$.

$$G(y^1,\cdots,y^n)=\{z^1,\cdots,z^n\},(y^1,\cdots,y^n)\in V,$$

$$\begin{cases} z^1=G_1(y^1,\cdots,y^n), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ z^n=G_n(y^1,\cdots,y^n), \end{cases}$$

其中 G_i 在 V 中有关于 $y^1,\cdots,y^n$ 的连续偏导数，则

$$\frac{\partial(z^1,\cdots,z^n)}{\partial(x^1,\cdots,x^n)}=\frac{\partial(z^1,\cdots,z^n)}{\partial(y^1,\cdots,y^n)}\cdot\frac{\partial(y^1,\cdots,y^n)}{\partial(x^1,\cdots,x^n)}.$$

证明

$$\det\begin{pmatrix} \frac{\partial z^1}{\partial x^1}\cdots\frac{\partial z^1}{\partial x^n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial z^n}{\partial x^1}\cdots\frac{\partial z^n}{\partial x^n} \end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix} \sum_{l=1}^n\frac{\partial z^1}{\partial y^l}\cdot\frac{\partial y^l}{\partial x^1}\cdots\sum_{l=1}^n\frac{\partial z^1}{\partial y^l}\cdot\frac{\partial y^l}{\partial x^n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \sum_{l=1}^n\frac{\partial z^n}{\partial y^l}\cdot\frac{\partial y^l}{\partial x^1}\cdots\sum_{l=1}^n\frac{\partial z^n}{\partial y^l}\cdot\frac{\partial y^l}{\partial x^n} \end{pmatrix}$$

$$=\det\left(\begin{pmatrix} \frac{\partial z^1}{\partial y^1}\cdots\frac{\partial z^1}{\partial y^n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial z^n}{\partial y^1}\cdots\frac{\partial z^n}{\partial y^n} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \frac{\partial y^1}{\partial x^1}\cdots\frac{\partial y^1}{\partial x^n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial y^n}{\partial x^1}\cdots\frac{\partial y^n}{\partial x^n} \end{pmatrix}\right)$$

$$=\det\begin{pmatrix} \frac{\partial z^1}{\partial y^1}\cdots\frac{\partial z^1}{\partial y^n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial z^n}{\partial y^1}\cdots\frac{\partial z^n}{\partial y^n} \end{pmatrix}\cdot\det\begin{pmatrix} \frac{\partial y^1}{\partial x^1}\cdots\frac{\partial y^1}{\partial x^n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial y^n}{\partial x^1}\cdots\frac{\partial y^n}{\partial x^n} \end{pmatrix}. \quad \#$$

推论 1 如果 $z^i=x^i$ $(i=1,\cdots,n)$，则

$$\frac{\partial(x^1,\cdots,x^n)}{\partial(y^1,\cdots,y^n)}\cdot\frac{\partial(y^1,\cdots,y^n)}{\partial(x^1,\cdots,x^n)}=1,$$

$$\frac{\partial(y^1,\cdots,y^n)}{\partial(x^1,\cdots,x^n)}\neq 0.$$

2. 可微映射

定义 2 设U是R^m中的开集，映射$F:U\to R^n$在$x_0\in U$称为可微分的，如果存在$n\times m$的矩阵$A=(a_{ij})$，使得满足：

$$F(x)-F(x_0)=A\cdot(x-x_0)+h(x_0,x)$$

及

$$\lim_{\|x-x_0\|\to 0}\frac{h(x_0,x)}{\|x-x_0\|}=0\left(\text{其中}\|x-x_0\|=\max_{1\leqslant j\leqslant m}\{|x^j-x_0^j|\}\right).\quad(1)$$

定理 2 (1°)(必要条件)如果映射F在x_0可微，则F_i在x_0有关于$x^1,\cdots,x^m$的偏导数，且

$$A=\begin{pmatrix}\frac{\partial F_1}{\partial x^1}\cdots\frac{\partial F_1}{\partial x^m}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \frac{\partial F_n}{\partial x^1}\cdots\frac{\partial F_n}{\partial x^m}\end{pmatrix}_{x=x_0}\quad(\text{简记为}DF(x_0)).$$

(2°)(充分条件) 如果$\frac{\partial F_i}{\partial x^j}$在$U$中存在，且在$x_0$连续，则$F$在$x_0$可微.

证明 (1°) 由(1)式得到

$$F_i(x)-F_i(x_0)=\sum_{s=1}^{m}a_{is}(x^s-x_0^s)+h_i(x_0,x),$$

则

$$\frac{\partial F_i}{\partial x^j}(x_0)=$$

$$=\lim_{x^j\to x_0^j}\frac{F_i(x_0^1,\cdots,x_0^{j-1},x^j,x_0^{j+1},\cdots,x_0^m)-F_i(x_0^1,\cdots,x_0^{j-1},x_0^j,x_0^{j+1},\cdots,x_0^m)}{x^j-x_0^j}$$

$$=\lim_{x^j\to x_0^j}\left[a_{ij}+\frac{h_i(x_0,x)}{x^j-x_0^j}\right]=\lim_{x^j\to x_0^j}\left[a_{ij}\pm\frac{h_i(x_0,x)}{\|x-x_0\|}\right]$$

$$=a_{ij}+\lim_{\|x-x_0\|\to 0}\frac{h_i(x_0,x)}{\|x-x_0\|}=a_{ij}.$$

(2°) 设

$$F(x)-F(x_0)=\left(\frac{\partial F_i}{\partial x^j}(x_0)\right)\cdot(x-x_0)+h(x_0,x),$$

由单变量的中值定理，

$$F_i(x)-F_i(x_0)=\sum_{j=1}^{m}[F_i(x_0^1,\cdots,x_0^{j-1},x^j,x^{j+1},\cdots,x^m)$$

$$-F_i(x_0^1,\cdots,x_0^{j-1},x_0^j,x^{j+1},\cdots,x^m)]$$

$$=\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial F_i}{\partial x^j}(x_0^1,\cdots,x_0^{j-1},\xi^j,x^{j+1},\cdots,x^m)\cdot(x^j-x_0^j)$$

$$=\sum_{j=1}^{m}\left[\frac{\partial F_i}{\partial x^j}(x_0)+a_{ij}\right](x^j-x_0^j)\quad(x_0^j<\xi^j<x^j),$$

因为$\frac{\partial F_i}{\partial x^j}$在 x_0 连续，所以$\lim\limits_{\|x-x_0\|\to 0}a_{ij}=0$，这就推出了

$$\frac{h(x_0,x)}{\|x-x_0\|}=\frac{[F(x)-F(x_0)]-\left(\frac{\partial F_i}{\partial x^j}(x_0)\right)\cdot(x-x_0)}{\|x-x_0\|}$$

$$=\frac{(a_{ij})\cdot(x-x_0)}{\|x-x_0\|}=(a_{ij})\cdot\frac{x-x_0}{\|x-x_0\|}$$

$$\to 0\,(当\|x-x_0\|\to 0),$$

因此，F 在 x_0 可微。 #

3．反函数和隐函数定理

定理 3（反函数定理） 设 U 是 R^n 中的开集，映射 $F: U\to R^n$

是 $C^r(r\geqslant 1)$类的(即有 r 阶连续偏导数),且$\operatorname{rank}\left(\frac{\partial F_i}{\partial x^j}(x_0)\right)=n$, $x_0\in U$, 则 F 是一个 C^r 的局部微分同胚①，它将 x_0 的一个领域映成 $F(x_0)$的一个邻域.

证明 我们可以假定 $x_0=0, F(x_0)=0, \left(\frac{\partial F_i}{\partial x^j}\right)_{x=x_0}=I$ (否则作一线性变换，不影响定理的证明). 选取 a 充分小，使得方体 $C^n(a)=\{x \mid \|x\|=\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n}|x^j|<a\}\subset U$, 且当 $x\in C^n(a)$ 时, $\det\left(\frac{\partial F_i}{\partial x^j}(x)\right)\neq 0$及$\left(\frac{\partial F_i}{\partial x^j}(x)\right)-I$ 中的元素满足$\left|\frac{\partial F_i}{\partial x^j}(x)-\delta_i^j\right|\leqslant\frac{1}{2n}$$\left(\text{只须注意到}\left(\frac{\partial F_i}{\partial x^j}(x_0)\right)-I=0\right)$.

如果我们令 $G(x)=F(x)-x$, 则当 $x_1, x_2\in C^n(a)$时，利用中值定理有

$$\begin{aligned}\|G(x_1)-G(x_2)\|&=\max_{1\leqslant i\leqslant n}\{|G_i(x_1)-G_i(x_2)|\}\\&=\max_{1\leqslant i\leqslant n}\left\{\left|\sum_{j=1}^n\frac{\partial G_i}{\partial x^j}(\xi_i)(x_1^j-x_2^j)\right|\right\}\\&\leqslant n\cdot\max_{1\leqslant i,j\leqslant n}\left\{\left|\frac{\partial G_i}{\partial x^j}(\xi_i)\right|\right\}\cdot\max_{1\leqslant j\leqslant n}|x_1^j-x_2^j|\\&\leqslant n\cdot\frac{1}{2n}\|x_1-x_2\|=\frac{1}{2}\|x_1-x_2\|,\end{aligned}$$

此外，还有

$$\|F(x_1)-F(x_2)\|=\|G(x_1)-G(x_2)+x_1-x_2\|\geqslant\|x_1-x_2\|-$$

$$\|G(x_1)-G(x_2)\|\geqslant\|x_1-x_2\|-\frac{1}{2}\|x_1-x_2\|=\frac{1}{2}\|x_1-x_2\|.$$

---

① C^r 的局部微分同胚F，即存在 x_0 的邻域 $V\subset U$，使$F(V)$是$F(x_0)$的邻域，且 $F:V\to F(V)$和 $F^{-1}:F(V)\to V$ 都是 C^r 映射。

(1°) 如果 $y\in C^n\left(\frac{a}{2}\right)$,则必存在一点 $x\in C^n(a)$,使得 $F(x)=y$.

为此，设

$$x_0=0, x_1=y, x_{k+1}=y-G(x_k) \qquad (k=0,1,\cdots).$$

容易看出

$$\|x_k-x_{k-1}\|=\|G(x_{k-1})-G(x_{k-2})\|\leqslant\frac{1}{2}\|x_{k-1}-x_{k-2}\|$$

$$\leqslant\cdots\leqslant\frac{1}{2^{k-1}}\|x_1-x_0\|=\frac{1}{2^{k-1}}\|y\|,$$

$$\|x_k\|=\|x_k-x_0\|\leqslant\|x_k-x_{k-1}\|+\|x_{k-1}-x_{k-2}\|+\cdots+\|x_1-x_0\|$$

$$\leqslant\left(\frac{1}{2^{k-1}}+\frac{1}{2^{k-2}}+\cdots+1\right)\|y\|\leqslant2\|y\|<2\cdot\frac{a}{2}=a,$$

$$\|x_{k+p}-x_k\|\leqslant\|x_{k+p}-x_{k+p-1}\|+\cdots+\|x_{k+1}-x_k\|$$

$$\leqslant\left(\frac{1}{2^{k+p-1}}+\cdots+\frac{1}{2^k}\right)\|y\|$$

$$=\frac{1}{2^k}\left(\frac{1}{2^{p-1}}+\cdots+1\right)\|y\|\leqslant\frac{1}{2^{k-1}}\|y\|,$$

于是 $x_k\in C^n(a)$及$\{x_k\}$是 Cauchy 序列. 设 $\lim\limits_{k\to+\infty}x_k=x$,再在上述第二式中令 $k\to+\infty$，得到

$$\|x\|\leqslant2\|y\|<a$$

因而$x\in C^n(a)$,且

$$x=y-G(x)=y-[F(x)-x]=y-F(x)+x,$$

$$F(x)=y,$$

这就证明了 x 的存在性.

再证唯一性. 如果 x, $x'\in C^n(a)$, 使得 $F(x)=F(x')$ 则由

$$0=\|F(x)-F(x')\|\geqslant\frac{1}{2}\|x-x'\|$$

推出 $x=x'$.

(2°) 由(1°) 可知 $F^{-1}, C^n\left(\frac{a}{2}\right)\to C^n(a)$ 是存在的. 另一方面，从

$$\|y-y_1\|=\|F(x)-F(x_1)\|\geqslant\frac{1}{2}\|x-x_1\|$$

$$=\frac{1}{2}\|F^{-1}(y)-F^{-1}(y_1)\|$$

可以推出 F^{-1} 是连续的(F^{-1} 是一致连续的).

显然,

$C^n\left(\frac{a}{2}\right)$在映射 F^{-1} 下的象是 $C^n(a)\cap F^{-1}\left(C^n\left(\frac{a}{2}\right)\right)$.

其中 $F^{-1}\left(C^n\left(\frac{a}{2}\right)\right)$是 $C^n\left(\frac{a}{2}\right)$在 F 下的逆象. 因为 F 连续，所以 $F^{-1}\left(C^n\left(\frac{a}{2}\right)\right)$是开集，从而 $C^n(a)\cap F^{-1}\left(C^n\left(\frac{a}{2}\right)\right)$也是开集，这就证明了

$$F: C^n(a)\cap F^{-1}\left(C^n\left(\frac{a}{2}\right)\right)\to C^n\left(\frac{a}{2}\right)$$

是一个拓扑(同胚)映射，它将 0 的一个邻域映成 $F(0)=0$ 的一个邻域.

(3°) 可以证明 F^{-1}是可微的.

由于 F 是 $C^r(r\geqslant1)$的，根据定理 2(2°)， F 在任意点 $x_1\in C_n(a)\cap F^{-1}\left(C^n\left(\frac{a}{2}\right)\right)$是可微的，即

$$F(x)-F(x_1)=\left(\frac{\partial F_i}{\partial x^j}(x_1)\right)\cdot(x-x_1)+h(x_1,x),$$

$$\lim_{\|x-x_1\|\to0}\frac{h(x_1,x)}{\|x-x_1\|}=0, x_1\text{ 固定},$$

$$x_1, x \in C^n(a) \cap F^{-1}\left(C^n\left(\frac{a}{2}\right)\right).$$

记$\left(\frac{\partial F_i}{\partial x^j}(x_1)\right)^{-1}$为$\left(\frac{\partial F_i}{\partial x^j}(x_1)\right)$的逆矩阵，则

$$\left(\frac{\partial F_i}{\partial x^j}(x_1)\right)^{-1}(F(x)-F(x_1))=(x-x_1)$$
$$+\left(\frac{\partial F_i}{\partial x^j}(x_1)\right)^{-1}\cdot h(x_1,x),$$

$$\left(\frac{\partial F_i}{\partial x^j}(x_1)\right)^{-1}\cdot(y-y_1)+h_1(y_1,y)=F^{-1}(y)-F^{-1}(y_1),$$

其中 $h_1(y_1,y)=-\left(\frac{\partial F_i}{\partial x^j}(x_1)\right)^{-1}\cdot h(x_1,x)$。因为

$$\|y-y_1\|=\|F(x)-F(x_1)\|\geqslant\frac{1}{2}\|x-x_1\|,$$

$$\frac{\|x-x_1\|}{\|y-y_1\|}\leqslant 2,$$

所以

$$\lim_{y\to y_1}\frac{h_1(y_1,y)}{\|y-y_1\|}$$

$$=\lim_{y\to y_1}\frac{-\left(\frac{\partial F_i}{\partial x^j}(x_1)\right)^{-1}\cdot h(F^{-1}(y_1),F^{-1}(y))}{\|y-y_1\|}$$

$$=-\left(\frac{\partial F_i}{\partial x^j}(x_1)\right)^{-1}\cdot\lim_{x\to x_1}\frac{h(x_1,x)}{\|x-x_1\|}\cdot\frac{\|x-x_1\|}{\|y-y_1\|}=0.$$

这就证明了 F^{-1} 在 y_1 是可微的。根据定理 2(1°) 可以推出 F_i^{-1} 在 y_1 有关于 $y^1,\cdots,y^n$ 的偏导数，且

$$\left(\frac{\partial F_i^{-1}}{\partial y^j}(y_1)\right)=\left(\frac{\partial F_i}{\partial x^j}(x_1)\right)^{-1}.$$

(4°) 最后，用归纳法证明 F^{-1} 是 C^r 的。

映射

$$y \to D(F^{-1})(y)=\left(\frac{\partial F_i^{-1}}{\partial y^j}(y)\right)=\left(\frac{\partial F_i}{\partial x^j}(x)\right)^{-1}$$
$$=(DF(x))^{-1}$$

可以由以下映射的复合而得到：

$$\underbrace{C^n\left(\frac{a}{2}\right)\xrightarrow{F^{-1}}C^n(a)\xrightarrow{DF}GL(n,R)\xrightarrow{\text{矩阵的逆}}GL(n,R)}_{D(F^{-1})},$$

其中 $GL(n,R)$ 表示 $n\times n$ 的非异矩阵的全体。根据 (2°)，F^{-1} 是 C^0 的(即是连续的)。此外，显然 DF 是 C^{r-1} 的，矩阵的逆所对应的映射是 C^∞ 的(即有各阶连续偏导数)，所以 $D(F^{-1})$ 是 C^0 的，即 F^{-1} 是 C^1 的。若 F^{-1} 是 C^k 的 $(1\leqslant k\leqslant r-1)$，则同理可推出 $D(F^{-1})$ 是 C^k 的，即 F^{-1} 是 C^{k+1} 的。这就证明了 F^{-1} 是 C^r 的。#

定理 4(隐函数定理) 设 $(x_0,y_0)\in U\subset R^m\times R^n$，$U$ 为开集。$f:U\to R^n$ 是 C^r 的 $(r\geqslant 1)$，$f(x_0,y_0)=0$，

$$\left.\frac{\partial(f_1,\cdots,f_n)}{\partial(y^1,\cdots,y^n)}\right|_{(x_0,y_0)}\neq 0,$$

则存在唯一的 C^r 映射 $g:U(x_0)\to R^n$(这里 $U(x_0)$ 是 x_0 的一个邻域)，使得 $g(x)=y$，$g(x_0)=y_0$，且

$$f(x,g(x))=0,\qquad x\in U(x_0).$$

证明 定义 $F:U\to R^{m+n}$ 为

$$F(x,y)=(x^1,\cdots,x^m,f_1(x,y),\cdots,f_n(x,y)),$$

显然

$$\det(DF(x,y))_{(x_0,y_0)}=\det\begin{pmatrix} I & 0\\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y}\end{pmatrix}_{(x_0,y_0)}$$

$$=\left.\frac{\partial(f_1,\cdots,f_n)}{\partial(y^1,\cdots,y^n)}\right|_{(x_0,y_0)}\neq 0,$$

因此，在(x_0,y_0)附近有局部逆映射 G。

如果 $f(x,g(x))=0$，则必须有

$$F(x,g(x))=(x,f(x,g(x)))=(x,0),$$
$$(x,g(x))=G\circ F(x,g(x))=G(x,0),$$
$$g(x)=\pi\circ G(x,0)\quad(\pi: R^m\times R^n\to R^n\text{ 为投影}).$$

另一方面，若令 $g(x)=\pi\circ G(x,0)$，显然它是 C^r 的，且

$(x,g(x))=(x,\pi\circ G(x,0))=G(x,0)$,

$(x,f(x,g(x)))=F(x,g(x))=F\circ G(x,0)=(x,0)$,

$f(x,g(x))=0$.

再由

$$F(x_0,y_0)=(x_0,f(x_0,y_0))=(x_0,0)$$
$$=(x_0,f(x_0,g(x_0)))=F(x_0,g(x_0))$$

推出

$(x_0,y_0)=G\circ F(x_0,y_0)=G\circ F(x_0,g(x_0))=(x_0,g(x_0))$,

$y_0=g(x_0)$,

所以 $g(x)=\pi\circ G(x,0)$就是所要求的唯一的 C^r映射。 #

推论 2 设 U 是 R^m 中的开集，$f: U\to R^n$ 是 C^r 的映射($r\geqslant 1$)，且 $f(0)=0$，$\operatorname{rank}\left(\frac{\partial f_i}{\partial x^j}\right)_0=m\ (m\leqslant n)$，则存在一个 C^r 的微分同胚 g，将 R^n 中 0 的一个邻域映成另一个邻域，使得 $g(0)=0$ 及

$$g\circ f(x^1,\cdots,x^m)=(x^1,\cdots,x^m,0,\cdots,0).$$

证明 不失一般性，我们可以假定

$$\left.\frac{\partial(f_1,\cdots,f_m)}{\partial(x^1,\cdots,x^m)}\right|_0\neq 0,$$

定义 $F: U\times R^{n-m}\to R^n$ 为

$$F(x^1,\cdots,x^n)=f(x^1,\cdots,x^m)+(0,\cdots,0,x^{m+1},\cdots,x^n).$$

则 $F(0)=0$，且

$$\left.\frac{\partial(F_1,\cdots,F_n)}{\partial(x^1,\cdots,x^n)}\right|_0=\det\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}(0) & 0\\ & I\end{pmatrix}=\left.\frac{\partial(f_1,\cdots,f_m)}{\partial(x^1,\cdots,x^m)}\right|_0\neq 0,$$

根据定理 3，存在 F 的局部逆映射 g，它是 C^r 的微分同胚，将 R^n 中 0 的一个邻域映成另一个邻域，使得 $g(0)=0$ 及

$$\begin{aligned}g\circ f(x^1,\cdots,x^m)&=g(F(x^1,\cdots,x^m,0,\cdots,0))\\&=(x^1,\cdots,x^m,0,\cdots,0).\qquad \#\end{aligned}$$

（可参看图 24）

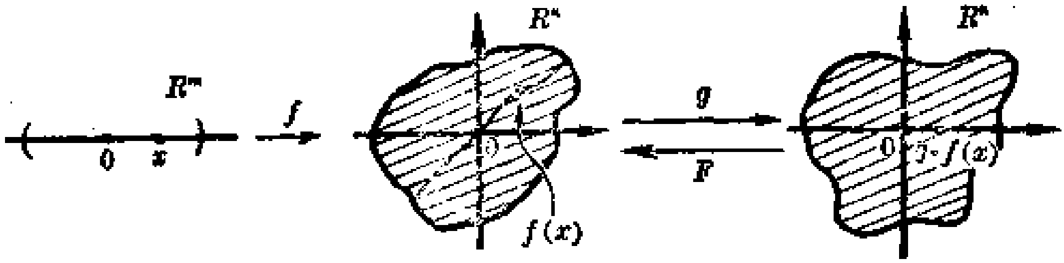


图 24

推论 3 设 U 是 R^m 中的开集，$f:U\to R^n$ 是 C^r 的映射（$r\geqslant 1$），$f(0)=0$，$\operatorname{rank}\left(\frac{\partial f_i}{\partial y^j}\right)_0=n\ (m\geqslant n)$，则存在一个 C^r 的微分同胚 h，将 R^m 中 0 的一个邻域映成另一个邻域，使得 $h(0)=0$ 及

$$f\circ h(x^1,\cdots,x^m)=(x^1,\cdots,x^n)$$

证明 因为 $\operatorname{rank}\left(\frac{\partial f_i}{\partial y^j}\right)_0=n$，不失一般性，可以假定

$$\left.\frac{\partial(f_1,\cdots,f_n)}{\partial(y^1,\cdots,y^n)}\right|_0\neq 0.$$

我们定义 $F:U\to R^m$ 为

$$F(y^1,\cdots,y^m)=(f_1(y),\cdots,f_n(y),y^{n+1},\cdots,y^m),$$

则 $F(0)=0$，$f=\pi\circ F$（$\pi:R^m\to R^n$ 为投影），且

$$\left.\frac{\partial(F_1,\cdots,F_m)}{\partial(y^1,\cdots,y^m)}\right|_0=\det\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}(0)\\ 0\quad I\end{pmatrix}=\left.\frac{\partial(f_1,\cdots,f_n)}{\partial(y^1,\cdots,y^n)}\right|_0\neq 0.$$

根据定理 3，存在 F 的局部逆映射 h，它是 C^r 的微分同胚，将 R^m 中 0 的一个邻域映成另一个邻域，使得 $h(0)=0$ 及

$$f\circ h(x^1,\cdots,x^m)=\pi\circ F\circ h(x^1,\cdots,x^m)=\pi(x^1,\cdots,x^m)$$
$$=(x^1,\cdots,x^n).\qquad \#$$

(可参看图 25)

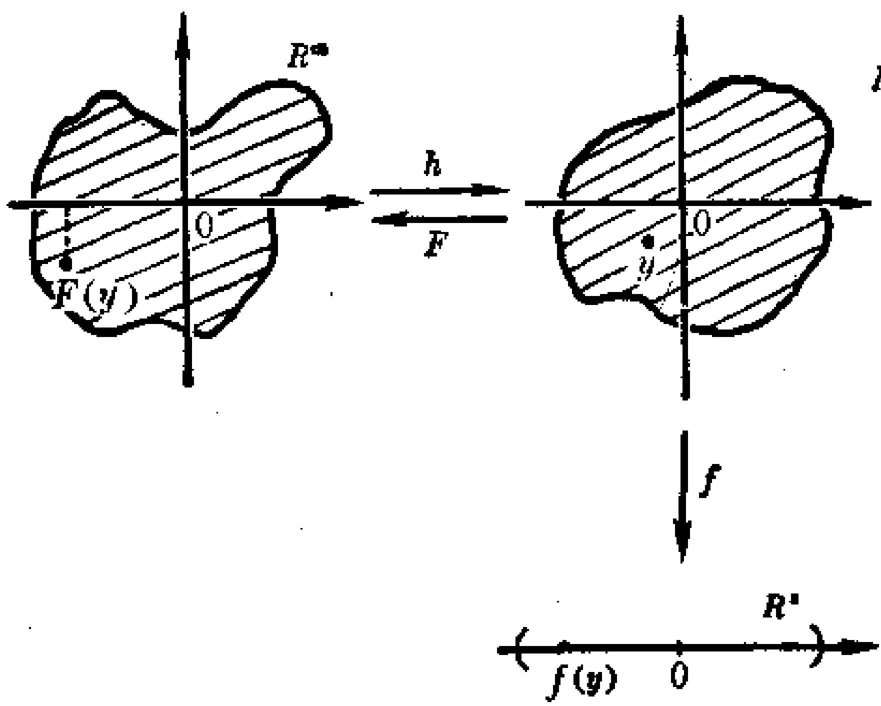


图 25

推论 4 设 U 是 R^m 中的开集，$f:U\to R^n$ 是 C^r 映射($r\geqslant 1$)，$f(0)=0$，$\operatorname{rank}\left(\frac{\partial f_i}{\partial y^j}(y)\right)=l(y\in U,l\leqslant m,l\leqslant n)$，则存在 C^r 的微分同胚 h 和 g，它们分别将 R^m 和 R^n 的 0 的一个邻域映成 0 的另一个邻域，使得 $h(0)=0$，$g(0)=0$ 及

$$g\circ f\circ h(x^1,\cdots,x^m)=(x^1,\cdots,x^l,0,\cdots,0).$$

证明 不失一般性，不妨设

$$\left.\frac{\partial(f_1,\cdots,f_l)}{\partial(y^1,\cdots,y^l)}\right|_0\neq 0.$$

令

$$(x^1,\cdots,x^l,\cdots,x^m)=F(y^1,\cdots,y^m)$$
$$=(f_1(y),\cdots,f_l(y),y^{l+1},\cdots,y^m),$$
$$F(0)=0,$$

$$\left.\frac{\partial(F_1,\cdots,F_m)}{\partial(y^1,\cdots,y^m)}\right|_0=\det\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial y^1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y^l} & \\ \cdots & \cdots & \cdots & * \\ \frac{\partial f_l}{\partial y^1} & \cdots & \frac{\partial f_l}{\partial y^l} & \\ & 0 & & I\end{pmatrix}$$

$$=\left.\frac{\partial(f_1,\cdots,f_l)}{\partial(y^1,\cdots,y^l)}\right|_0\neq 0.$$

由定理 3，F 有局部逆映射 h，将 R^m 中 0 的一个连通邻域 $U_1\subset U$ 映成 0 的另一个邻域，且

$$(z^1,\cdots,z^n)=f\circ h(x)$$
$$=(f_1\circ h(x),\cdots,f_l\circ h(x),\ f_{l+1}\circ h(x),\cdots,f_n\circ h(x))$$
$$=(f_1(y),\cdots,f_l(y),f_{l+1}\circ h(x),\cdots,f_n\circ h(x))$$
$$=(x^1,\cdots,x^l,f_{l+1}\circ h(x),\cdots,f_n\circ h(x))$$

因为

$$\operatorname{rank}\left(\frac{\partial(f\circ h)_i}{\partial x^j}\right)_{U_1}\equiv l.$$

所以

$$0=\left.\frac{\partial(z^1,\cdots,z^l,z^{l+i})}{\partial(x^1,\cdots,x^l,x^{l+s})}\right|_{U_1}=\det\begin{pmatrix}I & 0\\ * & \frac{\partial(f_{l+i}\circ h)}{\partial x^{l+s}}\end{pmatrix}_{U_1}$$

于是 $z_{l+i}=f_{l+i}\circ h(x)$ 仅是 $x^1,\cdots,x^l$ 的函数，记为

$$z_{l+j}=f_{l+j}\circ h(x)=f_{l+j}(x^1,\cdots,x^l)\quad(j=1,\cdots,n-l).$$

令

$$(z^1,\cdots,z^l,\cdots,z^n)=G(u^1,\cdots,u^n)$$
$$=(u^1,\cdots,u^l,\tilde{f}_{l+1}(u^1,\cdots,u^l),\cdots,\tilde{f}_n(u^1,\cdots,u^l))$$
$$+(0,\cdots,0,u^{l+1},\cdots,u^n),$$

$$G(0)=0,$$

$$G(u^1,\cdots,u^l,0,\cdots,0)=f\circ h(u^1,\cdots,u^m)\qquad(2)$$

$$\left.\frac{\partial(G_1,\cdots,G_n)}{\partial(u^1,\cdots,u^n)}\right|_0=\det\begin{pmatrix}I & 0\\ * & I\end{pmatrix}_0=1\neq0,$$

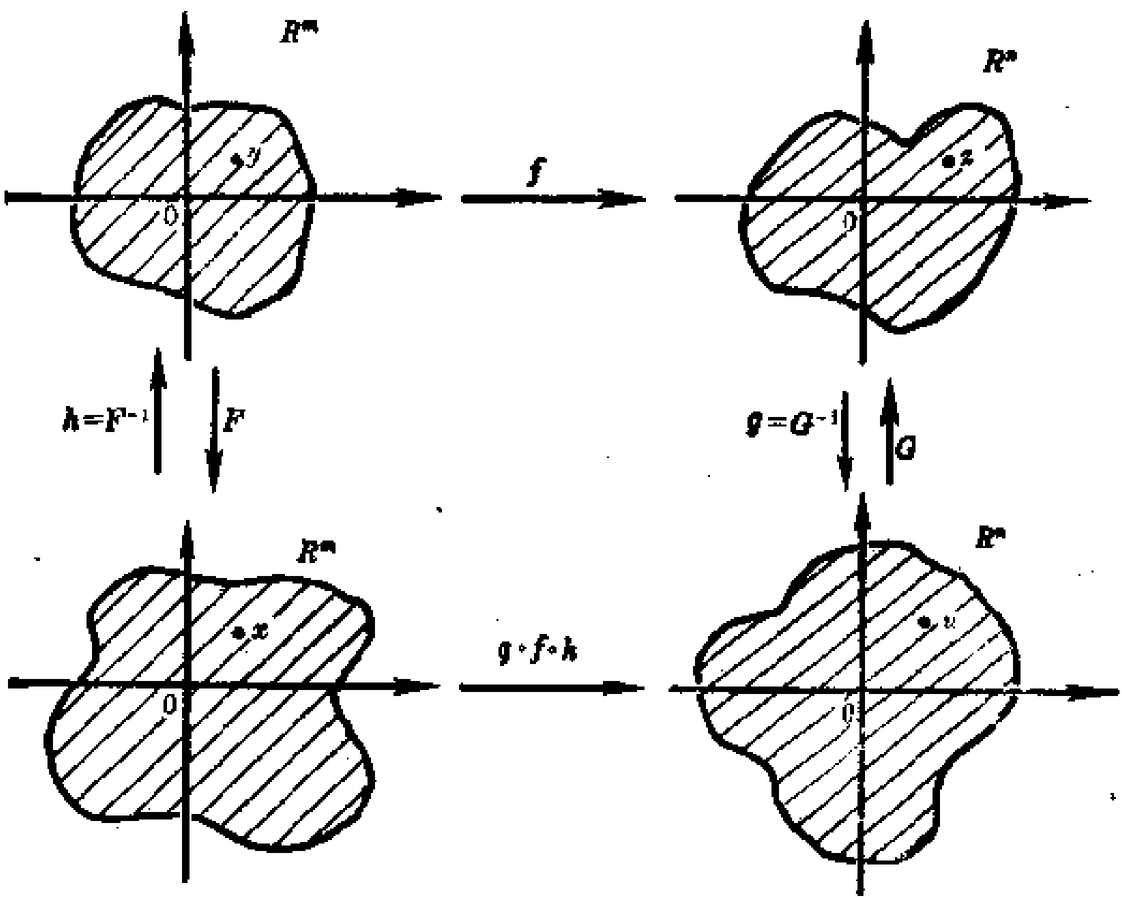


图 26

根据定理 3，G 有局部逆映射 g，将 R^n 中 0 的一个邻域映成 0 的另一个邻域，再由(2) 式得到

$$g\circ f\circ h(x^1,\cdots,x^m)=g\circ G(x^1,\cdots,x^r,0,\cdots,0)$$
$$=(x^1,\cdots,x^l,0,\cdots,0)。 \#$$

（参看图 26）

§1 习　　题

1. 设 U 是 R^m 中的开集，V 是 R^n 中的开集，F：$U\to R^n$，G：$V\to R^p$，$F(U)\subset V$，

$$F(x^1,\cdots,x^m)=(y^1,\cdots,y^n),$$
$$G(y^1,\cdots,y^n)=(z^1,\cdots,z^p),$$

$$\begin{cases}y^1=F_1(x^1,\cdots,x^m),\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ y^n=F_n(x^1,\cdots,x^m),\end{cases}\qquad\begin{cases}z^1=G_1(y^1,\cdots,y^n),\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ z^p=G_p(y^1,\cdots,y^n),\end{cases}$$

其中 F_i 在 U 中有关于 $x^1,\cdots,x^m$ 的连续偏导数，G_i 在 V 中有关于 $y^1,\cdots,y^n$ 的连续偏导数。

称

$$DF(x_0)=\begin{pmatrix}\frac{\partial F_1}{\partial x^1}(x_0)\cdots\frac{\partial F_1}{\partial x^m}(x_0)\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \frac{\partial F_n}{\partial x^1}(x_0)\cdots\frac{\partial F_n}{\partial x^m}(x_0)\end{pmatrix}$$为映射 F 在 x_0 的Jacobi矩阵，

证明

$$D(G\circ F)(x_0)=DG(y_0)\cdot DF(x_0),\ y_0=F(x_0).$$

2. 设 F：$(a,b)\to R^1$ 是 $C^r(r\geqslant1)$ 的映射，且 $F'(x)\neq0$，$x\in(a,b)$，则存在唯一的反函数 F^{-1}，且 F 和 F^{-1} 都是严格单调的，F^{-1} 也是 C^r 的映射，且

$$(F^{-1})'(y)=\frac{1}{F'(x)},$$

其中 $y=F(x)$，$x=F^{-1}(y)$.

3. 在复变量的复解析函数 $w=e^z$ 中，令

$$w=u+iv,\ z=x+iy$$

于是

$$u+iv=e^{x+iy}=e^x\cos y+ie^x\sin y,$$

$$\begin{cases}u=e^x\cos y,\\ v=e^x\sin y,\end{cases}$$

它确定了一个映射 $F: R^2\to R^2$,

$$(u,v)=F(x,y)=(e^x\cos y,\ e^x\sin y),$$

(1°) F 的值域是什么?

(2°) 证明 $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\neq 0$, $(x,y)\in R^2$.

因此, F 在 R^2 的任一点有 C^∞的局部逆映射, 但 F 不是整体一一的 (因而无整体的逆映射).

(3°) 直线 $x=x_0$ 或 $y=y_0$ 在 F 下的象是什么?

(4°) 设 $p=\left(0,\dfrac{\pi}{6}\right)$, $q=F(p)=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$, 令 G 是定义在含 q 的一个开集中的 F 的局部逆映射, 使得 $G(q)=p$. 求出 G 的明显表达式.

4. 设 U 是 R^m 中的开集, V 是 R^n 中的开集,

$$F: U\to R^n,\ G: V\to R^p,\ F(U)\subset V,$$

如果 F 在点 $x_0\in U$ 可微且 G 在 $F(x_0)\in V$ 可微, 则映射

$$G\circ F: U\to R^p$$

在 x_0 可微, 以及

$$D(G\circ F)(x_0)=DG(y_0)\cdot DF(x_0),\ y_0=F(x_0).$$

5. (1°) 设 $F(x)=x^3$, 显然有 $F^{-1}(y)=\sqrt[3]{y}$, $F'(0)=0$, F^{-1}在$F(0)=0$不可微(即不可导).

(2°) 如果 $F: U\to F(U)$在 x_0 可微, $\det DF(x_0)=0$(这里 U 和 $F(U)$ 都是 R^n 中的开集), F^{-1} 存在, 则 F^{-1} 在 $y_0=F(x_0)$不可微.

6. (1°) 设 $U\subset R^n$ 是开集, $F: U\to R^n$ 是 C^r 的($r\geqslant 1$), 且 $\det DF(x)\neq 0$, $x\in U$. 证明: $F(U)\subset R^n$ 是一个开集.

(2°) 在(1°)中, 如果 F 又是一一映射, 证明: $F^{-1}: F(U)\to U$是 C^r 的.

7. 设 $F: R^1\to R^1$,

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{2}+x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

证明：$F'(0)\neq 0$，$F'(x)$在 0 不连续，且 $F(x)$在 0 无局部反函数。

8．求隐函数的导数(以下隐函数定理的条件假定都满足)：

(1°) $F(x,y)=0$，$y=y(x)$，

证明：

$$y'=-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}},$$

$$y''=\frac{2F'_x\cdot F'_y\cdot F''_{xy}-F'^2_y\cdot F''_{x^2}-F'^2_x\cdot F''_{y^2}}{F'^3_y}.$$

(2°) $F(x^1,\cdots,x^m,y)=0$，$y=y(x^1,\cdots,x^m)$，

证明：

$$\frac{\partial y}{\partial x^j}=-\frac{F'_{x^j}}{F'_y}\qquad(j=1,\cdots,m).$$

(3°) $$\begin{cases}F_1(x^1,\cdots,x^m,y^1,\cdots,y^n)=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ F_n(x^1,\cdots,x^m,y^1,\cdots,y^n)=0,\end{cases}\qquad\begin{cases}y^1=y^1(x^1,\cdots,x^m),\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ y^n=y^n(x^1,\cdots,x^m).\end{cases}$$

证明：

$$\frac{\partial y^i}{\partial x^j}=-\frac{\dfrac{\partial(F_1,\cdots,F_n)}{\partial(y^1,\cdots,y^{i-1},x^j,y^{i+1},\cdots,y^n)}}{\dfrac{\partial(F_1,\cdots,F_n)}{\partial(y^1,\cdots,y^n)}}\qquad\begin{pmatrix}i=1,\cdots,n\\ j=1,\cdots,m\end{pmatrix}$$

9．(1°) 利用归纳法证明隐函数定理(参看Г.М．菲赫金哥尔茨著)《微积分学教程》第一卷第二分册第六章)。

(2°) 利用隐函数定理证明反函数定理。

10．设 $F:R^2\to R^1$ 是一个C^1 映射，证明：F 不是一一的。

(提示：令 $G(x,y)=(F(x,y),y)$)。

推广这结果到 $F:R^m\to R^n(n<m)$的情形。

11．设 $F:[a,b]\to R^n$ 是连续映射和 F 在(a,b) 中是可微的．则存在 $\xi\in(a,b)$，使得$\|F(b)-F(a)\|\leqslant(b-a)\|DF(\xi)\|$ ($\|\quad\|$为向量空间通常

的模）。

（提示：令 $\varphi(t)=[F(b)-F(a)]\cdot F(t)$，$a\leqslant t\leqslant b$）

12. 设 $U\subset R^m$ 是凸开集。$F: U\to R^n$ 是可微的，且存在一个实数 M 使得

$$\|DF(x)\|=\sqrt{\sum_{i,j}\left(\frac{\partial F_i}{\partial x^j}\right)^2}\leqslant M, x\in U.$$

则

$$\|F(b)-F(a)\|\leqslant M\|b-a\|,\ a\in U,\ b\in U.$$

（提示：令 $g(t)=F(a+t(b-a))$，$0\leqslant t\leqslant 1$）

13*. 反函数定理证明如下：

设 $DF(x_0)=A$，选取 λ 使得

$$2\lambda\|A^{-1}\|=1 \qquad (\|A^{-1}\|\text{参看 12 题}),$$

由 DF 在 x_0 连续，存在一个以 x_0 为中心的开球 $U(x_0)\subset U$，满足

$$\|DF(x)-A\|<\lambda, x\in U(x_0)$$

对于任何 $y\in R^n$，我们定义

$$\varphi(x)=x+A^{-1}(y-F(x)),\ x\in U.$$

(1°) $F(x)=y\Longleftrightarrow\varphi(x)=x$，即 x 是 φ 的不动点。

(2°) $\|\varphi(x_1)-\varphi(x_2)\|\leqslant\frac{1}{2}\|x_1-x_2\|$，$x_1, x_2\in U(x_0)$.

(3°) φ 在 $U(x_0)$ 中至多有一个不动点，因而 F 在 $U(x_0)$ 中是一一的。

(4°) $V=F(U(x_0))$ 是开集。

(5°) 设 $G: V\to U(x_0)$ 是 F 的局部逆映射，则 G 是 C^r 的。

14. 定义：设 $A\subset R^n$，如果对任何 $\varepsilon>0$，存在可数个方体

$$C(x_i, r_i)=\{x\in R^n \mid |x^j-x_i^j|<r_i,\ j=1, \cdots, n\},$$

$i=1,2,\cdots$，使得

$$A\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}C(x_i,r_i),$$

且总体积

$$\sum_{i=1}^{\infty}\mathrm{vol}\,C(x_i,\ r_i)=\sum_{i=1}^{\infty}(2r_i)^n<\varepsilon\ (\mathrm{vol}\,C(x_i,r_i)$$ 表示 $C(x_i,r_i)$ 的体积)，则称 A 为**零测集**，记为 $\mathrm{meas}A=0$。

设 $U\subset R^n$ 是开集，F：$U\to R^n$ 是 C^1 的，如果 $A\subset U$ 是零测集，则 $F(A)$ 也是零测集。

15．设 $U\subset R^m$ 是开集，F：$U\to R^n(m<n)$是 C^1 的，则 $F(U)$是零测集。

16．证明：零测集的任何子集是零测集．可数集合是零测集．可数集合的闭包是零测集吗？

17．证明：有限个或可数个零测集的并是零测集．

18．题 14 中零测集的定义等价于：对任何 $\varepsilon>0$，存在可数个球体

$$\{B(x_i,r_i)=\{x\in R^n\,|\,\|x-x_i\|<r_i\},\ i=1,\ 2,\ \cdots,$$

使得

$$A\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}B(x_i,r_i),$$

且总体积

$$\sum_{i=1}^{\infty}\mathrm{vol}\,B(x_i,r_i)<\varepsilon.$$

19．题 14 中零测集的定义等价于：对任何 $\varepsilon>0$，存在可数个开集U_i，$i=1,2,\cdots$，使得

$$A\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}U_i,$$

且总体积

$$\sum_{i=1}^{\infty}\mathrm{vol}\,U_i<\varepsilon.$$

20．在题 14 的定义中，如果"可数"改为"有限"，问两种定义是否等价？举例说明。

§ 2 微分流形$(M,\mathscr{D})$

2.1 微分流形 $(M,\mathscr{D})$

1. 问题的提出

在平面 R^2 上可以引进一个整体坐标系，使得 R^2 上的点 P 与坐标(x,y)一一对应．且点列 $P_n\to P\Longleftrightarrow x(P_n)\to x(P)$，$y(P_n)\to y(P)$。

我们自然要问，能否在球面 S^2 上引进一个类似于上述性质的整体坐标系呢？回答是否定的．因为如果这种坐标系存在，则球面 S^2 同胚于平面 R^2。但 S^2 是紧致的，R^2 是非紧致的，这就产生了矛盾．

利用Brouwer 的区域不变性定理(设$U\subset R^n$ 为开集，F：$U\to F(U)\subset R^n$ 为同胚映射，则 $F(U)$也是 R^n 的开集)，甚至 S^2 也不能和平面 R^2 的一个子集同胚，因此，也不存在 R^2 的一个开集 U 中的坐标(x,y)与 S^2 的点 P 之间的一一对应，使得满足上述收敛点列的性质．

于是，我们不得不降低要求，将 S^2 分成两部分 S_1 和 S_2，使它们的每一部分与 R^2 中的某个开集同胚，且坐标系满足上述性质．这样的坐标系是否存在呢？回答是肯定的。

例如，记

$S^2=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2=a^2,a>0\}$，

$S_1=\{(x,y,z)\in S^2\,|\,z>-a\}$，

$S_2=\{(x,y,z)\in S^2\,|\,z<a\}$。

设南极$(0,0,-a)$，与S_1上的任意一点 $P(x,y,z)$连接的直线交 x-y 平面于$(u,v,0)$，将(u,v)作为 S_1 上对应于点P的坐标．类似地，设北极$(0,0,a)$ 与 S_2 上的任意一点 $P(x,y,z)$ 连接的直线交 x-y 平面于$(\bar{u},\bar{v},0)$，将$(\bar{u},\bar{v})$作为 S_2 上对应于P的坐标（参

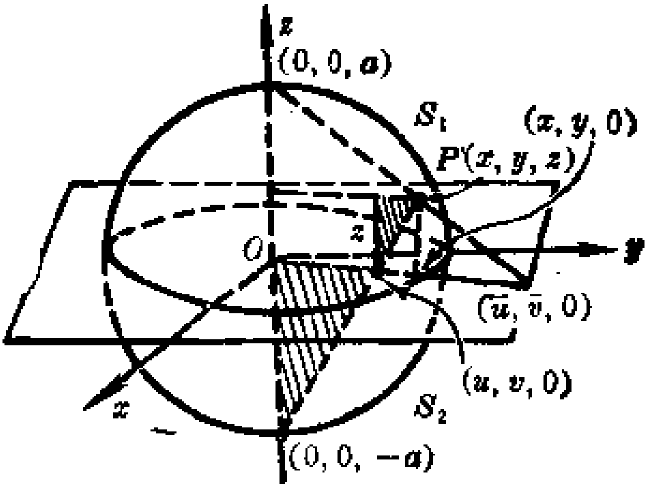


图 27

看图 27).

令$(u,v)=t(x,y)$,则

$$\frac{z}{a}=\frac{\sqrt{x^2+y^2}-t\sqrt{x^2+y^2}}{t\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{1}{t}-1,$$

$$t=\frac{a}{a+z},$$

$$\begin{cases} u=tx=\dfrac{ax}{a+z}, \\ v=ty=\dfrac{ay}{a+z}, \end{cases}$$

$$u^2+v^2=\frac{a^2(x^2+y^2)}{(a+z)^2}=\frac{a^2(a^2-z^2)}{(a+z)^2}=\frac{a^2(a-z)}{a+z}$$

$$=a^2\left(-1+\frac{2a}{a+z}\right), \tag{1}$$

这里

$$u^2+v^2<+\infty,$$

再由(1)式得到

$$a+z=\frac{2a^3}{u^2+v^2+a^2}, \qquad \frac{1}{t}=\frac{a+z}{a}=\frac{2a^2}{u^2+v^2+a^2}.$$

$$\begin{cases} z=\dfrac{a(a^2-u^2-v^2)}{u^2+v^2+a^2}, \\ x=\dfrac{u}{t}=\dfrac{2a^2u}{u^2+v^2+a^2}, \\ y=\dfrac{v}{t}=\dfrac{2a^2v}{u^2+v^2+a^2}. \end{cases}$$

类似地，也有

$$\bar{u}^2+\bar{v}^2<+\infty,$$

$$\begin{cases} \bar{u}=\dfrac{ax}{a-z}, \\ \bar{v}=\dfrac{ay}{a-z}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} z=\dfrac{a(\bar{u}^2+\bar{v}^2-a^2)}{\bar{u}^2+\bar{v}^2+a^2}, \\ x=\dfrac{2a^2\bar{u}}{\bar{u}^2+\bar{v}^2+a^2}, \\ y=\dfrac{2a^2\bar{v}}{\bar{u}^2+\bar{v}^2+a^2}, \end{cases}$$

于是，

$$\begin{cases} \bar{u}=\dfrac{ax}{a-z}=\dfrac{\dfrac{a\cdot 2a^2u}{u^2+v^2+a^2}}{a-\dfrac{a(a^2-u^2-v^2)}{u^2+v^2+a^2}}=\dfrac{a^2u}{u^2+v^2}, \\ \bar{v}=\dfrac{a^2v}{u^2+v^2}. \end{cases}$$

$$\bar{u}^2+\bar{v}^2=\frac{a}{u^2+v^2}.$$

$$\begin{cases} u=\dfrac{(u^2+v^2)\bar{u}}{a^2}=\dfrac{a^2\bar{u}}{\bar{u}^2+\bar{v}^2}, \\ v=\dfrac{(u^2+v^2)\bar{v}}{a^2}=\dfrac{a^2\bar{v}}{\bar{u}^2+\bar{v}^2}. \end{cases}$$

显然在 $S_1\cap S_2$ 中，$\bar{u},\bar{v}$ 是 u,v 的 C^∞ 函数（即有任意阶连续

偏导数). 反之,u,v 也是 $\bar{u},\bar{v}$ 的C^∞函数.

球面 S^2 上的开集 S_1,S_2 及其相应的局部坐标系 $(u,v),(\bar{u},\bar{v})$构成 S^2 上的"C^∞流形构造". 关于微分流形的严格定义就不难给出了.

2. C^r 流形$(M,\mathscr{D})$

定义 1 设(M,τ)是T_2拓扑空间,而集合

$\mathscr{D}=\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\,|\,U_\alpha$是$M$的开集,$\varphi_\alpha: U_\alpha\to\varphi_\alpha(U_\alpha)$ (R^n中的开集)是同胚映射(**局部欧**)$\}$

满足条件:

$$(1°)\ \bigcup_\alpha U_\alpha=M.$$

(2°) **相容性**:若$(U_\alpha,\varphi_\alpha),(U_\beta,\varphi_\beta)\in\mathscr{D}$,$U_\alpha\cap U_\beta\neq\phi$,则$\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1}$是 C^r 类的(当然$\varphi_\alpha\circ\varphi_\beta^{-1}$也是 C^r 类的).

(3°) **最大性**:集合$\mathscr{D}$关于(2°)是最大的. 那就是,如果 U 是 M 的开集,$\varphi: U\to\varphi(U)$是同胚,$\varphi(U)$是 R^n 的开集,且(U,φ)与$\mathscr{D}$中的任何 $(U_\alpha,\varphi_\alpha)$ 相容,则必有 $(U,\varphi)\in\mathscr{D}$. 它也等价于,如果$(U,\varphi)\bar{\in}\mathscr{D}$,则$(U,\varphi)$与$\mathscr{D}$中某个$(U_\alpha,\varphi_\alpha)$不相容.

则我们称$(M,\mathscr{D})$为 **n 维 C^r 流形**,φ_α 为U_α上的**局部坐标系**,U_α为φ_α 的**坐标邻域**. 设 $\varphi_\alpha(p)=(x^1(p),\cdots,x^n(p))$,$p\in U_\alpha$,$x^1,\cdots,x^n$ 是定义在 U_α 上的实函数. 有时,我们也将$\{x^i\}=\{x^1,\cdots,x^n\}$称为局部坐标系.

对于 $p\in M$,如果$(U_\alpha,\varphi_\alpha)\in\mathscr{D}$,$p\in U_\alpha$,则称$(U_\alpha,\varphi_\alpha)$为 **$P$ 点的一个局部坐标系**.

$r=0$,$\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1}$ 是 C^0 类的(即是连续的),C^0 流形也称为 **拓扑流形**.

$r\geqslant1$,$(M,\mathscr{D})$称为 **C^r 微分流形**,$\mathscr{D}$称为 **C^r 类微分构造**.

$r=\infty$,$\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1}$是 C^∞ 类的(即有各阶连续的偏导数),$(M,\mathscr{D})$

称为 **C^∞ 微分流形**.

$r=\omega$, $\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1}$ 是 C^ω 类的（即实解析的——函数在每点的一个邻域中可以展开成收敛的幂级数），$(M,\mathscr{D})$称为**实解析流形**。

注 如果 $r\geqslant 1$, $(U_\alpha,\varphi_\alpha)$, $\{x^i\}$ 和 (U_β,φ_β), $\{y^i\}$ 是 p 点的两个局部坐标系，则

$$1=\frac{\partial(y^1,\cdots,y^n)}{\partial(y^1,\cdots,y^n)}=\frac{\partial(y^1,\cdots,y^n)}{\partial(x^1,\cdots,x^n)}\cdot\frac{\partial(x^1,\cdots,x^n)}{\partial(y^1,\cdots,y^n)},$$

$$\frac{\partial(y^1,\cdots,y^n)}{\partial(x^1,\cdots,x^n)}\neq 0 \qquad (\text{在 } \varphi_\alpha(U_\alpha\cap U_\beta)\text{ 中}),$$

$$\frac{\partial(x^1,\cdots,x^n)}{\partial(y^1,\cdots,y^n)}\neq 0 \qquad (\text{在 } \varphi_\beta(U_\alpha\cap U_\beta)\text{ 中}).$$

（参看图 28）

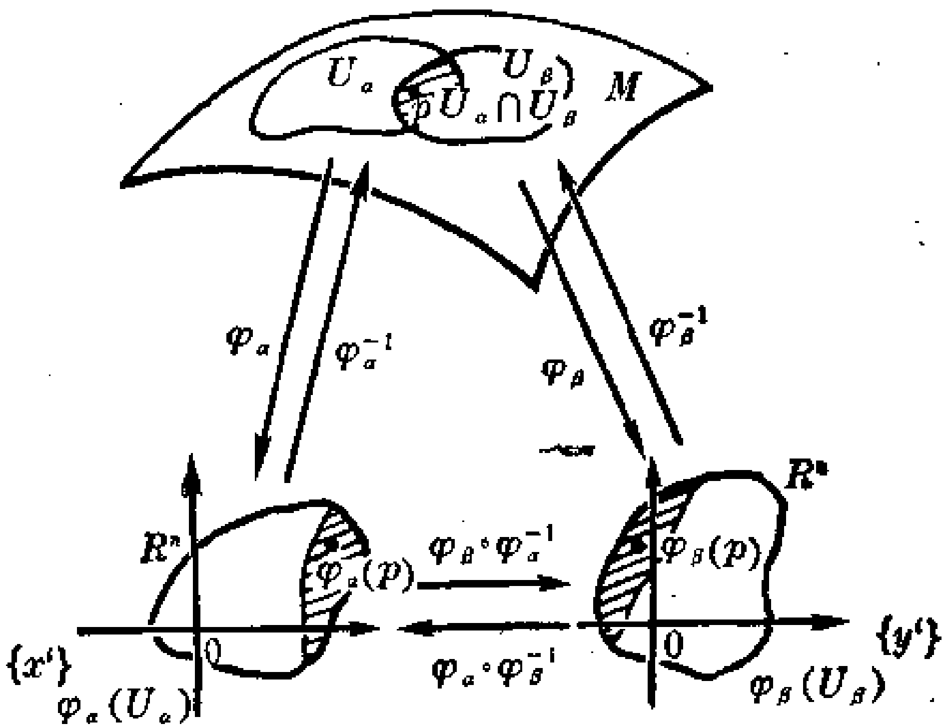


图 28

定理 1 (1) 设 $\mathscr{D}'=\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}$ 满足定义 1 中的条件(1°)，(2°)，则它唯一确定了一个C^r类的微分构造 $\mathscr{D}=\{(U,\varphi)\mid$对任何 $(U_\alpha,\varphi_\alpha)\in\mathscr{D}'$, $\varphi\circ\varphi_\alpha^{-1}$ 和 $\varphi_\alpha\circ\varphi^{-1}$ 是 C^r 的$\}$. (2)设 $\mathscr{D}_1'$ 和 $\mathscr{D}_2'$ 满足

定义1中的条件(1°)、(2°)，并且$\mathscr{D}_1'$和$\mathscr{D}_2'$中的元素彼此相容的，则它们所确定的微分构造是相同的，即$\mathscr{D}_1=\mathscr{D}_2$.

证明 (1) 由$\mathscr{D}'\subset\mathscr{D}$，所以$\mathscr{D}$满足条件(1°).

设$(U,\varphi),(V,\psi)\in\mathscr{D}$，则由$\varphi\circ\psi^{-1}=(\varphi\circ\varphi_\alpha^{-1})\circ(\varphi_\alpha\circ\psi^{-1})$是$C^r$的($(U_\alpha,\varphi_\alpha)\in\mathscr{D}'$)，推出$\mathscr{D}$满足条件(2°).

设(U,φ)与$\mathscr{D}$中的任一元素相容，由于$\mathscr{D}'\subset\mathscr{D}$，所以$(U,\varphi)$与$\mathscr{D}'$中的任一元素相容，$(U,\varphi)\in\mathscr{D}$. 这就证明了满足条件(3°).

(2) 设$\mathscr{D}_i$是由$\mathscr{D}_i'$所确定的微分构造 $(i=1,2)$，$(U,\varphi)\in\mathscr{D}_1$，对任何$(V,\psi)\in\mathscr{D}_2'$，由于$\varphi\circ\psi^{-1}=(\varphi\circ\varphi_\alpha^{-1})\circ(\varphi_\alpha\circ\psi^{-1})$ 和 $\psi\circ\varphi^{-1}=(\psi\circ\varphi_\alpha^{-1})\circ(\varphi_\alpha\circ\varphi^{-1})$是$C^r$的($(U_\alpha,\varphi_\alpha)\in\mathscr{D}_1'$)，所以$(U,\varphi)\in\mathscr{D}_2$，$\mathscr{D}_1\subset\mathscr{D}_2$. 同理可证$\mathscr{D}_2\subset\mathscr{D}_1$. 这就证明了$\mathscr{D}_1=\mathscr{D}_2$. #

此定理告诉我们要构造一个C^r类的微分流形，只须找出满足条件(1°)，(2°)的$\mathscr{D}'$即可. 我们称$\mathscr{D}'$为微分构造$\mathscr{D}$的一个基.

例 1 设$M=R^n$，$\mathscr{D}'=\{(R^n,I)\,|\,I:R^n\to R^n,\ I(p)=p,p\in R^n\}$，则由$\mathscr{D}'$确定了一个通常的$n$维$C^\infty$流形$(R^n,\mathscr{D})$（实际上，$\mathscr{D}'$也确定了一个实解析流形）.

例 2 设$(M,\mathscr{D})$是C^r流形，U是M的开集，$\mathscr{D}=\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}$，令

$$\mathscr{D}_1=\{(U\cap U_\alpha,\varphi_\alpha)\,|\,U\cap U_\alpha\neq\phi,(U_\alpha,\varphi_\alpha)\in\mathscr{D}\},$$

显然$(U,\mathscr{D}_1)$也是一个C^r流形.

例 3 设 $M=R^1$，

$$\mathscr{D}_1'=\{(R^1,I)\,|\,I:R^1\to R^1,u=I(x)=x,x\in R^1\},$$

$$\mathscr{D}_2'=\{(R^1,\varphi)\,|\,\varphi:R^1\to R^1,v=\varphi(x)=x^3,x\in R^1\}.$$

则由它们确定的两个C^∞微分构造是不相同的，即$\mathscr{D}_1\neq\mathscr{D}_2$. 事实上，

$$u=I\circ\varphi^{-1}(v)=v^{\frac{1}{3}}$$

在 $v=0$ 不可导.

因此,$(R^1,\mathscr{D}_1)$和$(R^1,\mathscr{D}_2)$是 R^1 上的两个不同的 1 维 C^∞ 流形(参看图 29).

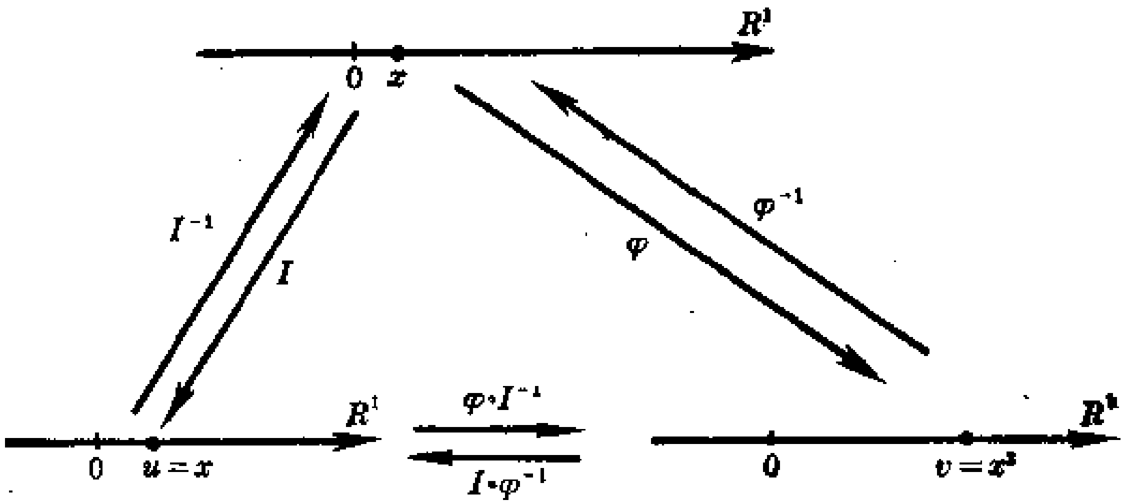


图 29

例 4 $M=S^1$,

$$U_1=S^1-\{e^{i\cdot 0}\},\qquad \varphi_1: U_1\to(0,2\pi)\subset R^1,$$
$$e^{i\theta}\to\varphi_1(e^{i\theta})=\theta\ \ (0<\theta<2\pi).$$
$$U_2=S^1-\{e^{i\cdot\pi}\},\qquad \varphi_2: U_2\to(\pi,3\pi)\subset R^1,$$
$$e^{i\eta}\to\varphi_2(e^{i\eta})=\eta\ \ (\pi<\eta<3\pi).$$

在 $U_1\cap U_2$ 中,如果$e^{i\theta}=e^{i\eta}$,则

$$\eta=\theta+2k\pi=\begin{cases}\theta+2\pi, & 0<\theta<\pi,\\ \theta, & \pi<\theta<2\pi.\end{cases}$$

显然 η 是 θ 的C^∞函数,θ 也是 η 的C^∞函数,所以,由 $\mathscr{D}'=\{(U_1,\varphi_1),(U_2,\varphi_2)\}$确定了一个 1 维 C^∞ 流形$(S^1,\mathscr{D})$(参看图 30).

例 5 在本节开始提出的例子中,设

$$\varphi_1: S_1\to\varphi_1(S_1)=R^2,$$
$$\varphi_1(x,y,z)=(u,v),$$

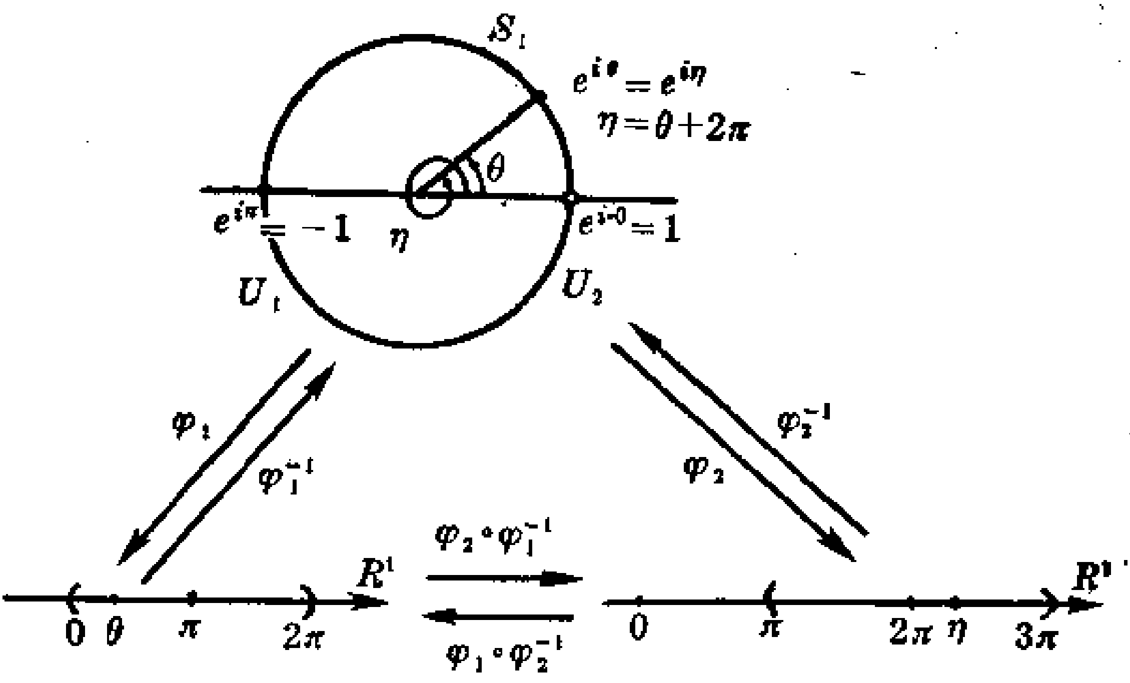


图 30

$$\begin{cases} u=\dfrac{ax}{a+z}, \\ v=\dfrac{ay}{a+z}. \end{cases}$$

$\varphi_2: S_2 \to \varphi_2(S_2)=R^2,$

$\varphi_2(x,y,z)=(\bar{u},\bar{v}),$

$$\begin{cases} \bar{u}=\dfrac{ax}{a-z}, \\ \bar{v}=\dfrac{ay}{a-z}. \end{cases}$$

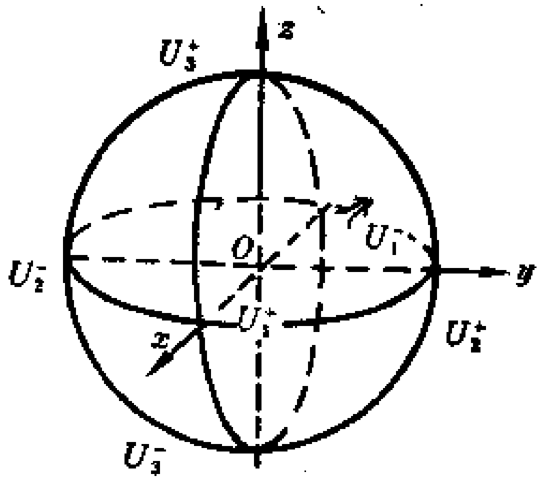


图 31

由于

$$\begin{cases} \bar{u}=\dfrac{a^2u}{u^2+v^2}, \\ \bar{v}=\dfrac{a^2v}{u^2+v^2}, \end{cases} \text{和} \begin{cases} u=\dfrac{a^2\bar{u}}{\bar{u}^2+\bar{v}^2}, \\ v=\dfrac{a^2\bar{v}}{\bar{u}^2+\bar{v}^2}, \end{cases}$$

是C^∞的，所以$\mathscr{D}'_1=\{(S_1,\varphi_1),(S_2,\varphi_2)\}$确定了一个 2 维 C^∞ 流形

$(S^2,\mathscr{D}_1)$.

下面我们给出 $M=S^2$的C^∞流形的微分构造的另一个基．设

$$U_1^+=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2=a^2,x>0\},$$

$$\varphi_1^+:U_1^+\to\varphi_1^+(U_1^+)=\{(y,z)\mid y^2+z^2<a^2\}\subset R^2,$$

$$\varphi_1^+(x,y,z)=(y,z).$$

$$U_2^+=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2=a^2,y>0\},$$

$$\varphi_2^+:U_2^+\to\varphi_2^+(U_2^+)=\{(x,z)\mid x^2+z^2<a^2\}\subset R^2,$$

$$\varphi_2^+(x,y,z)=(x,z).$$

$$U_3^+=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2=a^2,z>0\},$$

$$\varphi_3^+:U_3^+\to\varphi_3^+(U_3^+)=\{(x,y)\mid x^2+y^2<a^2\}\subset R^2,$$

$$\varphi_3^+(x,y,z)=(x,y).$$

类似地可以定义(U_1^-,φ_1^-),(U_2^-,φ_2^-),(U_3^-,φ_3^-)(参看图 31).

容易验证

$$\mathscr{D}'_2=\{(U_1^+,\varphi_1^+),(U_2^+,\varphi_2^+),(U_3^+,\varphi_3^+),$$
$$(U_1^-,\varphi_1^-),(U_2^-,\varphi_2^-),(U_3^-,\varphi_3^-)\}$$

满足定义 1 中的条件(1°),(2°)．因此它确定了一个 2 维C^∞ 流形 $(S^2,\mathscr{D}_2)$.

（思考：$\mathscr{D}_1=\mathscr{D}_2$?）

例 6 $M=P^2$ (2 维实射影平面),类似于例 5(参看图 32),

$$\mathscr{D}'=\{(U_1,\varphi_1^+),(U_2^+,\varphi_2^+),(U_3^+,\varphi_3^+)\}$$

确定了一个 2 维C^∞流形$(P^2,\mathscr{D})$.

例 7 $M=\{(x,y)\mid(x^2+y^2)^2=x^2-y^2\}$ (双纽线)作为R^2的子拓扑空间不是 1 维流形.

(反证法)若M是 1 维流形，则存在含O (0,0) 点的一个开集 U 及同胚映射

$$\varphi:U\to(a,b)\subset R^1,\qquad \varphi(O)=c\in(a,b).$$

当然 $\varphi:U-\{(O)\}\to\{(a,c)\cup(c,b)\}$也是同胚映射．但 $U-\{(O)\}$ 有四个道路连通分支,而$\{(a,c)\cup(c,b)\}$ 只有两个道路连通分支,

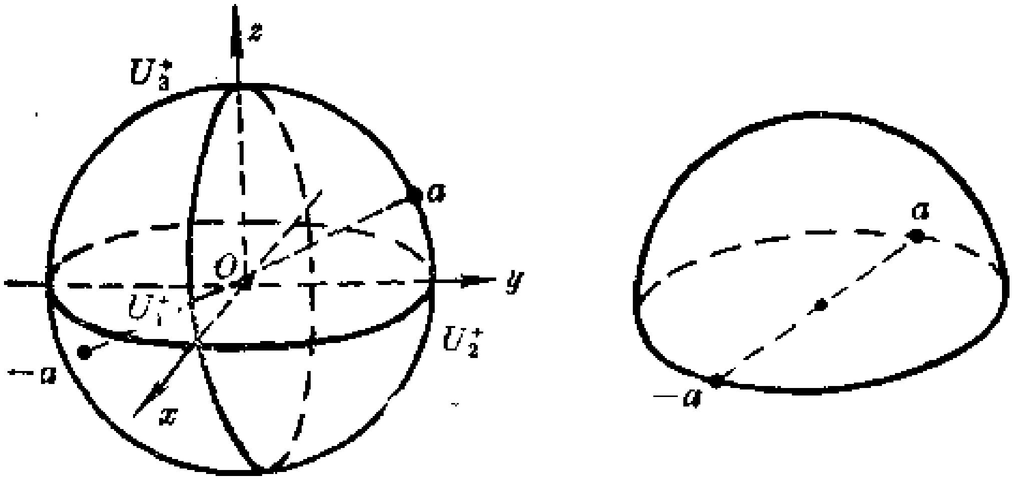


图 32

矛盾.

例 8 设 $M(m,n)$是所有 $m\times n$ 实矩阵的空间. $M(m,n)$可以认作为 R^{mn},因此自然确定了一个 C^∞流形(当然也确定了一个实解析流形). 设 $M(m,n;k)$ 表示所有秩为 $k(0<k\leqslant\min(m,n))$的 $m\times n$ 矩阵的空间,以 $M(m,n)$ 的诱导拓扑为其拓扑. 则 $M(m,n;k)$是一个 $k(m+n-k)$维的C^∞流形(实解析流形).

事实上,设 $X_0\in M(m,n)$. 如果$\operatorname{rank}X_0=k$,则存在可逆矩阵P和Q使得

$$PX_0Q=\begin{pmatrix} A_0 & B_0 \\ C_0 & D_0 \end{pmatrix},$$

这里A_0是 $k\times k$ 的非异矩阵. 存在$\varepsilon>0$,如果矩阵 $A-A_0$的所有元素的绝对值都小于ε,则A是非奇异的. 设U^*是满足下列条件的X全体: $X\in M(m,n)$, 且

$$PXQ=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

这里 $A-A_0$的所有元素的绝对值小于ε. 则 U^*是 $M(m,n)$ 的一个开集. 如果 $X\in U^*$,则$X\in M(m,n;k)\Longleftrightarrow D=CA^{-1}B$. 因为

$$\begin{pmatrix} I_k & 0 \\ -CA^{-1} & I_{m-k} \end{pmatrix}$$

是非奇异的(这里 I_j 是 $j\times j$ 单位矩阵)，所以矩阵

$$\begin{pmatrix} I_k & 0 \\ -CA^{-1} & I_{m-k} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & -CA^{-1}B+D \end{pmatrix} \tag{2}$$

与

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

有相同的秩．但(2)右边的矩阵，秩为 $k\Longleftrightarrow D=CA^{-1}B$．我们取 $U=U^*\cap M(m,n;k)$(它是关于诱导拓扑的开集)为 $X_0\in M(m,n;k)$ 的坐标邻域，相应的坐标映射由

$$\varphi(X)=\begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix}$$

定义，这里我们将 $R^{mn-(m-k)(n-k)}=R^{k(m+n-k)}$ 视作为所有形如

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix}$$

的空间．则映射 φ^{-1} 由

$$\varphi^{-1}\begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix}=P^{-1}\begin{pmatrix} A & B \\ C & CA^{-1}B \end{pmatrix}Q^{-1}$$

给出．

如果 (U,φ) 和 $(\tilde{U},\tilde{\varphi})$ 是两个坐标系，$U\cap\tilde{U}\neq\phi$．则 $\tilde{\varphi}\circ\varphi^{-1}$ 由

$$\tilde{\varphi}\circ\varphi^{-1}\begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \tilde{A} & \tilde{B} \\ \tilde{C} & 0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

给出，这里

$$\tilde{P}P^{-1}\begin{pmatrix} A & B \\ C & CA^{-1}B \end{pmatrix}Q^{-1}\tilde{Q}=\begin{pmatrix} \tilde{A} & \tilde{B} \\ \tilde{C} & \tilde{C}\tilde{A}^{-1}\tilde{B} \end{pmatrix}.$$

因为(3)右边矩阵的每个元素都是矩阵 A，B，C 的元素的有理函数(也是实解析函数，是 C^∞ 函数)，所以上述 $\mathscr{D}'=\{(U,\varphi)\}$ 确

定了一个 $k(m+n-k)$ 维的C^∞微分构造（实解析构造）$\mathscr{D}$，于是$(M(m,n;k),\mathscr{D})$是C^∞流形（实解析流形）.

例 9 设$(M_1,\mathscr{D}_1)$和$(M_2,\mathscr{D}_2)$分别是 n_1 和 n_2 维C^r 流形，

$$\mathscr{D}_1=\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\},$$
$$\mathscr{D}_2=\{(V_\beta,\psi_\beta)\}.$$

令

$$\mathscr{D}'=\{(U_\alpha\times V_\beta,h_{\alpha\beta})\mid(U_\alpha,\varphi_\alpha)\in\mathscr{D}_1,(V_\beta,\psi_\beta)\in\mathscr{D}_2\},$$

其中 $U_\alpha\times V_\beta$ 表示拓扑积，而

$$h_{\alpha\beta}:U_\alpha\times V_\beta\to\varphi_\alpha(U_\alpha)\times\psi_\beta(V_\beta)\subset R^{n_1}\times R^{n_2}=R^{n_1+n_2},$$
$$h_{\alpha\beta}(p,q)=(\varphi_\alpha(p),\psi_\beta(q))$$

是同胚映射. 显然$\mathscr{D}'$满足定义 1 中的条件(1°)，(2°). 因此，它就确定了 $M_1\times M_2$ 上的微分构造 $\mathscr{D}=\mathscr{D}_1\times\mathscr{D}_2$，我们称$n_1+n_2$ 维的C^r流形 $(M_1\times M_2,\mathscr{D}_1\times\mathscr{D}_2)$为 C^r 流形 $(M_1,\mathscr{D}_1)$和 $(M_2,\mathscr{D}_2)$ 的积流形.

类似地，可以定义$(M_1\times\cdots\times M_k,\mathscr{D}_1\times\cdots\times\mathscr{D}_k)$.

例如，n 维环面

$$T^n=\underbrace{S^1\times\cdots\times S^1}_{n\text{个}}$$

是 n 维C^∞流形 R^{n_1} 和R^{n_2} 的C^∞积流形是

$$R^{n_1}\times R^{n_2}=R^{n_1+n_2}.$$

2.1 习 题

1．仿照 S^1 证明 S^n 是n维 C^∞ 流形（参看“问题的提出”和例 5）.

2．在例 5 中证明 $\mathscr{D}_1=\mathscr{D}_2$.

3．用下面方法证明 $S^1\times S^1$ 是C^∞流形：

(1°) 利用例 4 和例 9.

(2°) 构造 $\mathscr{D}'$，使 $\mathscr{D}'$ 中仅有三个元素，其中每一个在 R^2 中的同胚象为正方形. 以此证明 $S^1\times S^1$ 是C^∞流形.

(3°)*能构造$\mathscr{D}'$，使$\mathscr{D}'$ 中仅有两个元素吗？如果 $\mathscr{D}'$ 中元素都是单连通呢？

4. 证明 n 维实射影空间 P^n 是 C^∞ 流形。

5. 证明闭区间不是1维流形。

6. 证明一个流形 M 必是 T_1 空间(利用 T_1 空间或局部欧)和 A_1 空间。

7. 定义1中 $\mathscr{D}$ 的坐标邻域的全体是否就是 τ?举例说明。但是否是一个拓扑基?

8. 设 $Q\subset S^1=\{(x,y)\mid x^2+y^2=1\}$,

$$M=\{(x,y)\mid 0<x^2+y^2<1\}\cup Q.$$

由第一章§2例6可得到一个拓扑空间 (M,τ)。我们构造 $\mathscr{D}'=\{(U,\varphi)\}$ 如下:

如果 U 为 $\{(x,y)\mid 0<x^2+y^2<1\}$ 中的开集,

$$令\ \varphi=I\ (恒等映射)。$$

如果 $U=\{(x,y)\mid 0<x^2+y^2<r<1\}\cup\{q\}\ (q\in Q)$,令

$$\varphi(p)=\begin{cases}p, & p\in\{(x,y)\mid 0<x^2+y^2<r<1\},\\ (0,0), & p=q.\end{cases}$$

容易看出 $\mathscr{D}'$ 满足定义1中条件(1°),(2°),因而它确定了 M 的一个 C^∞ 的微分构造 $\mathscr{D}$。$(M,\mathscr{D})$ 是一个2维 C^∞ 流形(但是这里不要求 (M,τ) 是 T_2 空间)。

(1°) 如果 Q 多于两点,则 M 不是 T_2 空间。

(2°) 如果 Q 是 S^1 的不可数子集,则 M 不是 A_2 空间。

(3°) 如果 Q 是 S^1 的有限或可数子集,则 M 是 A_2 空间。

(4°) $\{(x,y)\mid 0<x^2+y^2<r<1\}$ 关于 M 的闭包是什么? $p_n=\left(\frac{1}{n},0\right)$ 的极限点是什么?

9. 如果在定义1中,用复数空间 C^n 代替 R^n,用复解析函数代替实解析函数,类似地可以定义**复解析流形**,而 n 称为复维数。证明:复维数为 n 的复解析流形可以视作实维数 $2n$ 的实解析流形。

10. 设 $M=R^2$,拓扑基 $\tau'=\{$平行于 x 轴的直线中的通常开集$\}$.证明:M 是1维 C^∞ 流形。并且是 T_2 空间,但非 A_2 空间。

11*. 设 $(M,\mathscr{D}^r)$ 是 C^r 微分流形,则 M 自然可以视作 C^k 流形,$r>k$。只须取 $\mathscr{D}^r$ 为 M 上的 C^k 微分构造 $\mathscr{D}^k$ 的基。试证:$\mathscr{D}^r\subset\mathscr{D}^k$ 是严格的包含关系。

如果 M 又是 A_2 空间，则其逆也是正确的：给了一个 C^r 微分构造 $\mathscr{D}^r$，如果 $r<k$，则存在一个 C^k 微分构造 $\mathscr{D}^k$，使得 $\mathscr{D}^r \supset \mathscr{D}^k$，甚至我们还可以取 $k=\omega$。此结果参考 Whitney[1]。

有这样的拓扑流形存在，它根本没有微分构造。此结果参考 Kervaire [3]。

12. 定义：设(M,τ)是拓扑空间，如果对任何 $p,q\in M$，存在一个拓扑变换 $F: M\to M$，使得 $F(p)=q$，则称 M 为**齐性空间**。

(1°) 设 $V^n=\{x\in R^n \mid \|x\|<1\}$，$p,q\in V^n$，作一拓扑变换

$$F: \overline{V}^n\to \overline{V}^n,$$

使得 $F(p)=q$，且 $F|_{S^{n-1}}=I$（恒等映射）。

(2°) 证明：V^n 和 S^n 都是齐性空间。

(3°) 证明：连通的流形 M 是齐性空间。

13. 设 $T(m,R^n)$是 n 维实向量空间 R^n 中的 m 个有序线性无关的向量的集合（$T(m,R^n)$ 称为 R^n 的 m-框架的空间）。则 $T(m,R^n)$ 是一个 mn 维的 C^∞ 流形。事实上，关于 R^n 的一个选定的基，$T(m,R^n)$ 可以与 $M(m,n;m)$（见例 8）等同。

14*. 设 $G_{k,n}$ 是 $n+k$ 维实向量空间 R^{n+k} 中过原点 O 的 n 维子空间所组成的集合，我们可以使它成为一个 nk 维的 C^∞ 微分流形（实解析流形），称为 R^{n+k} 的 **Grassmann 流形**。

设 $A\in M(n,n+k;n)$，A 的 n 行是R^{n+k} 中 n 个线性无关的向量，所以它确定了 $G_{k,n}$ 的一个元素，记为 $\lambda(A)$。此外，$\lambda(A)=\lambda(B)\Longleftrightarrow A=CB$，$C$ 是 $n\times n$ 的非异矩阵。

因为 $M(n,n+k;n)$是 $R^{n(n+k)}$ 的开子集，它具有自然的拓扑和 C^∞ 微分构造。给 $G_{k,n}$ 以商拓扑：V 是 $G_{k,n}$ 的开集 $\Longleftrightarrow \lambda^{-1}(V)$ 是$M(n,n+k;n)$的开集（注意：若 $A=CB$，C 非异，记为 $A\sim B$，则$\sim$是一个等价关系，因而可诱导出一个商拓扑）。

设 $U=\{(P,Q) \mid P$是 $n\times n$ 非异矩阵$\}$，显然U是 $R^{n(n+k)}$ 的开子集。此外容易验证 $\lambda^{-1}(\lambda(U))=U$，因而 $V=\lambda(U)$是 $G_{k,n}$ 的开集。令

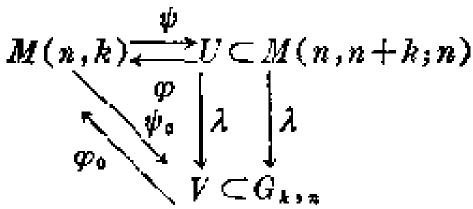
$$\psi: M(n,k)\to M(n,n+k;n),$$
$$\psi(Q)=(I,Q).$$

再设 $\psi_0=\lambda\circ\psi$，于是 ψ_0 是连续的（因为 λ 和 ψ 都是连续的）。容易验证 ψ_0：

$M(n,k)\to V\subset G_{k,n}$ 是一一的，且 $\psi_0(M(n,k))=V$。令

$$\varphi: U\to M(n,k)$$
$$\varphi(P,Q)=P^{-1}Q.$$

不难看出 φ 在集合 $\lambda^{-1}(\lambda(P,Q))$ 上是常值映射，因此，φ 导出了一个映射 φ_0：$V\to M(n,k)$，$\varphi_0(\lambda(P,Q))=P^{-1}Q$。可以证明 φ_0 是连续的，且是 ψ_0 的逆映射，这就证明了 ψ_0 是同胚映射。



证明

(1°) $G_{k,n}$ 有 C^∞ 微分构造(实解析构造)。

(2°) $G_{k,n}$ 是 T_2 空间。

(3°) $G_{k,n}$ 是 $\bar{A}_2$ 空间。

(4°) $G_{k,n}$ 是紧致的。

15. 设 M 为流形，证明：道路连通 $\Longleftrightarrow$ 连通。并且，道路连通分支与连通分支相一致。

16. 设流形 M 为 A_2 空间。证明：列紧 $\Longleftrightarrow$ 紧致。

2.2 C^k 函数和 C^k 映射

1. C^k 函数和 C^k 映射

定义 1 设 $(M_1,\mathscr{D}_1)$ 和 $(M_2,\mathscr{D}_2)$ 分别是 m 维和 n 维的 C^r 流形，如果映射

$$F: M_1\to M_2$$

对于任意 $p\in M_1$ 和 $q=F(p)$ 的任意局部坐标系 $(V_\beta,\psi_\beta)\in\mathscr{D}_2$，必有 p 的适当的局部坐标系 $(U_\alpha,\varphi_\alpha)\in\mathscr{D}_1$，使

$$F(U_\alpha)\subset V_\beta \tag{1}$$

(它等价于 F 是连续的)。并且对于满足(1)的坐标系，

$$\psi_\beta\circ F\circ\varphi_\alpha^{-1}: \varphi_\alpha(U_\alpha)\to\psi_\beta(V_\beta)$$

是 $C^k(k\leqslant r)$ 的，即

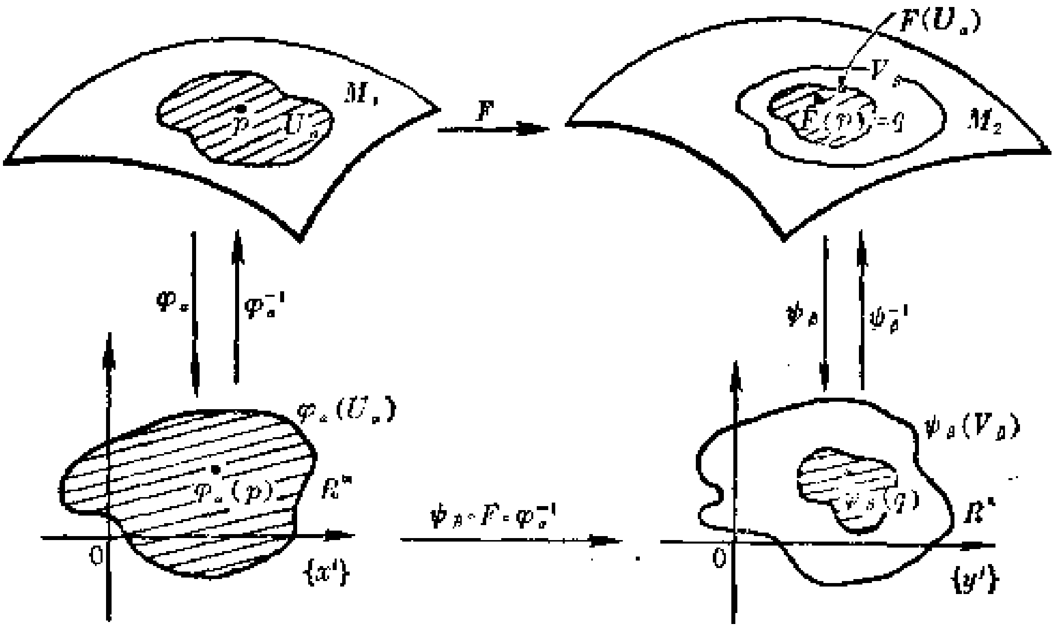


图 33

$$\begin{cases} y^1=(\psi_\beta\circ F\circ\varphi_\alpha^{-1})_1(x^1,\cdots,x^m), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y^n=(\psi_\beta\circ F\circ\varphi_\alpha^{-1})_n(x^1,\cdots,x^m). \end{cases}$$

是 C^k 的，则称 **F 为 M_1 到 M_2 的 C^k 映射**（参看图 33）。

如果 $U\subset M_1$ 是开集，由 2.1 例 2，自然可以把它视作 C^r 流形。将 U 代替 M_1，$(U\cap U_\alpha,\varphi_\alpha)$ 代替 $(U_\alpha,\varphi_\alpha)$ 得到 $F:U\to M_2$ 是 C^k 的定义。

定理 1 设 $\mathscr{D}_1'$ 和 $\mathscr{D}_2'$ 分别是 C^r 流形 $(M_1,\mathscr{D}_1)$ 和 $(M_2,\mathscr{D}_2)$ 的微分构造的基，如果对于 $\mathscr{D}_1'$ 和 $\mathscr{D}_2'$ 以及映射 $F: M_1\to M_2$ 满足定义 1 中的条件，则 F 是 C^k $(k\leqslant r)$ 的。

证明 设 $p\in M_1$，$F(p)=q$，$(V,\psi)\in\mathscr{D}_2$ 是 q 的任意局部坐标系，取 $(V_\beta,\psi_\beta)\in\mathscr{D}_2'$ 是 q 的局部坐标系，则必有 p 的适当的局部坐标系 $(U_\alpha,\varphi_\alpha)\in\mathscr{D}_1'$ 使 $F(U_\alpha)\subset V_\beta$，由于

$$\psi_\beta\circ F\circ\varphi_\alpha^{-1}:\varphi_\alpha(U_\alpha)\to\psi_\beta(V_\beta)$$

是 C^k 的，所以存在 p 局部坐标系 $(U,\varphi_\alpha)\in\mathscr{D}_1$，使 $U\subset U_\alpha$，$F(U)\subset V\cap V_\beta\subset V$，显然，

$$\psi\circ F\circ\varphi_\alpha^{-1}=(\psi\circ\psi_\beta^{-1})\circ(\psi_\beta\circ F\circ\varphi_\alpha^{-1})$$

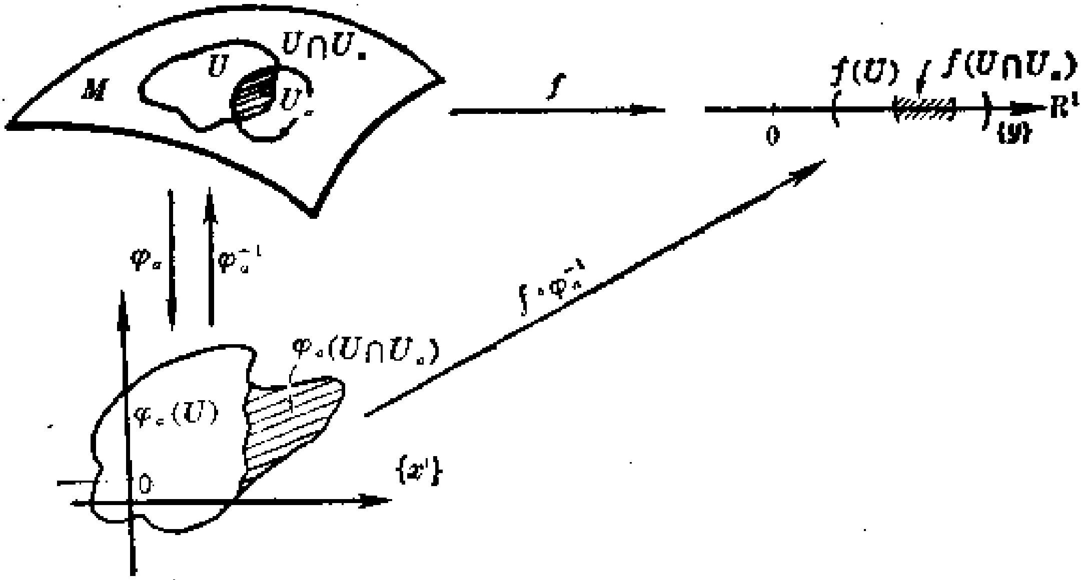


图 34

是 $\varphi_\alpha(U)\to\psi(V)$的 C^k 映射． #

根据定义 1 和定理 1，特别地，当 $M_2=R^1$ 时，我们可以给出 C^k 函数的定义的较简单的叙述．

定义 2 设$(M,\mathscr{D})$是m维的 C^r 流形，$U\subset M$ 是开集，如果映射

$$f:U\to R^1$$

对于任何$(U_\alpha,\varphi_\alpha)\in\mathscr{D}'$($\mathscr{D}$ 的基)，$U\cap U_\alpha\neq\phi$，有

$$f\circ\varphi_\alpha^{-1}:\varphi_\alpha(U\cap U_\alpha)\to R^1$$

是 $C^k(k\leqslant r)$的，即

$$y=f\circ\varphi_\alpha^{-1}(x^1,\cdots,x^m)$$

是 C^k 的，则称 f 是 **U 上的 C^k 函数**（参看图 34）．记 $C^k(U)$ 为 U 上 C^k 函数的全体．

2．C^k 映射的秩$(k\geqslant1)$

定义 3 我们将

$$D(\psi_\beta\circ F\circ\varphi_\alpha^{-1})_{\varphi_\alpha(p)}=\left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right)_{\varphi_\alpha(p)}=\begin{pmatrix}\frac{\partial y^1}{\partial x^1}\cdots\frac{\partial y^1}{\partial x^m}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \frac{\partial y^n}{\partial x^1}\cdots\frac{\partial y^n}{\partial x^m}\end{pmatrix}_{\varphi_\alpha(p)}$$

称为 C^k 映射 F 在 p 点关于局部坐标系 $\{x^i\}$ 和 $\{y^j\}$ 的 **Jacobi 矩阵**.

引理 1 设 $(U_{\alpha'},\varphi_{\alpha'})$ 和 $(V_{\beta'},\psi_{\beta'})$ 分别是关于 p 和 $F(p)$ 的另外的局部坐标系，则

$$\operatorname{rank} D(\psi_\beta\circ F\circ\varphi_\alpha^{-1})_{\varphi_\alpha(p)}=\operatorname{rank} D(\psi_{\beta'}\circ F\circ\varphi_{\alpha'}^{-1})_{\varphi_{\alpha'}(p)}.$$

证明 因为

$$D(\psi_{\beta'}\circ F\circ\varphi_{\alpha'}^{-1})_{\varphi_{\alpha'}(p)}=D(\psi_{\beta'}\circ\psi_\beta^{-1})_{\psi_\beta(F(p))}\cdot D(\psi_\beta\circ F\circ\varphi_\alpha^{-1})_{\varphi_\alpha(p)}\cdot D(\varphi_\alpha\circ\varphi_{\alpha'}^{-1})_{\varphi_{\alpha'}(p)},$$

而 $D(\psi_\beta\circ\psi_{\beta'}^{-1})$ 和 $D(\varphi_\alpha\circ\varphi_{\alpha'}^{-1})$ 都是满秩的，所以

$$\operatorname{rank} D(\psi_{\beta'}\circ F\circ\varphi_{\alpha'}^{-1})_{\varphi_{\alpha'}(p)}=\operatorname{rank} D(\psi_\beta\circ F\circ\varphi_\alpha^{-1})_{\varphi_\alpha(p)}.\quad \#$$

由引理 1，我们得到

定义 4 $\operatorname{rank} D(\psi_\beta\circ F\circ\varphi_\alpha^{-1})_{\varphi_\alpha(p)}$（它与坐标系选取无关）称为 $C^k(k\geqslant 1)$ 映射 F 在 p 点的**秩**，记为

$$(\operatorname{rank} F)_p=\operatorname{rank} D(\psi_\beta\circ F\circ\varphi_\alpha^{-1})_{\varphi_\alpha(p)}.$$

3. C^k 的浸入、嵌入、微分同胚($k\geqslant 1$)

定义 5 设 $(M_1,\mathscr{D}_1)$ 和 $(M_2,\mathscr{D}_2)$ 分别是 m 维和 n 维 C^r 流形，如果 $C^k(k\leqslant r)$ 映射

$$F: M_1\to M_2$$

对任何 $p\in M_1$，有 $(\operatorname{rank} F)_p=m(m\leqslant n)$，则称 F 为一个 **C^k 浸入**. 如果

$$F: M_1\to F(M_1)\subset M_2$$

是同胚，并且 F 又是一个 C^k 浸入，则称 F 为一个 **C^k 嵌入**. 如果

$$F: M_1\to M_2$$

是同胚，且又是一个 C^k 浸入，则称 F 为一个 **C^k 微分同胚**（或 **C^k 拓扑映射**）. 显然，这里 $m=n$. 由第二章 §1 的反函数定理，F^{-1} 也是一个 C^k 微分同胚.

例 1 设 $M_1=R^1$, $M_2=R^2$,

$$F_1: R^1\to R^2,$$

$$F_1(t)=(x(t),y(t))=\left(\frac{t(t^2+1)}{t^4+1},\ \frac{t(t^2-1)}{t^4+1}\right),$$

通过简单计算可知$(x(t),y(t))$满足双纽线方程(见图 35)：

$$(x^2+y^2)^2=x^2-y^2,$$

并且在 F_1下，R^1上的点与双纽线上的点是一一对应的，又$(x_t')^2+(y_t')^2\neq 0$(即(x_t',y_t') 秩为 1)，因此，$\operatorname{rank} F_1=1$. 这就证明了 F_1 是一个 C^∞ 的浸入. 但是，F^{-1} 并不连续，从而 F_1 不是同胚，当然就不是嵌入.

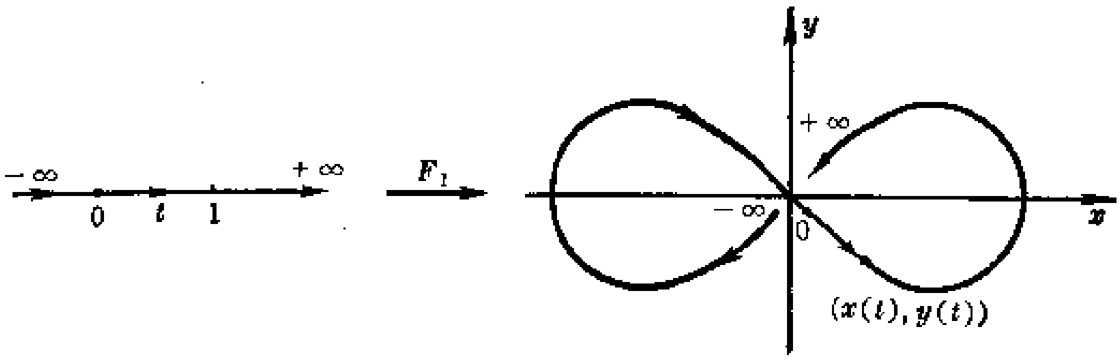


图 35

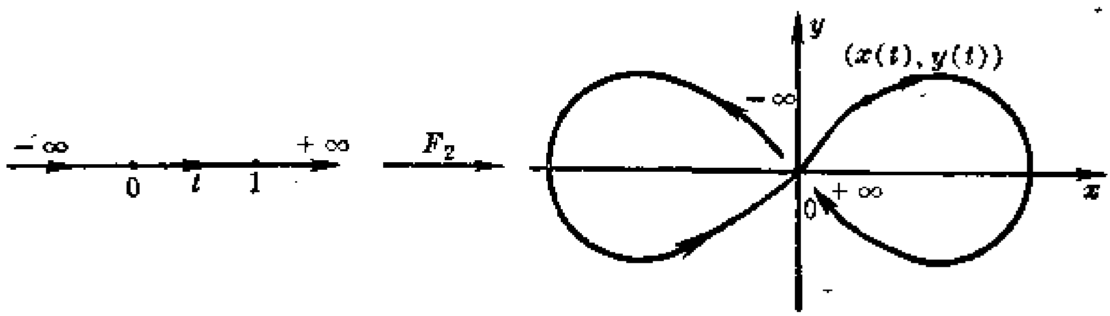


图 36

类似地，

$$F_2: R^1\to R^2,$$

$$F_2(t)=\left(\frac{t(t^2+1)}{t^4+1},\ \frac{-t(t^2-1)}{t^4+1}\right),$$

也是一个 C^∞ 浸入，但不是嵌入(见图 36).

设$(M_1,\mathscr{D}_1)$和$(M_2,\mathscr{D}_2)$分别是m维和n维的 C^r 流形，

$$F: M_1 \to M_2$$

是 C^r 映射($r \geqslant 1$)，$p \in M_1, q = F(p) \in M_2$。相应于第二章§1的推论2和3有以下几个定理：

定理 2 如果 F 是 C^r 映射，且 $(\mathrm{rank}\, F)_p = m (m \leqslant n)$，则

(1°) 对于 q 的任意局部坐标系 $\{y^1, \cdots, y^n\}$，当 y^i 适当地排列时，$\{y^1 \circ F, \cdots, y^m \circ F\}$ 是 p 的局部坐标系。

(2°) 对于 p 的任意局部坐标系 $\{x^1, \cdots, x^m\}$，则可在 q 适当选取局部坐标系 $\{z^1, \cdots, z^n\}$，使得 $x^i = z^i \circ F (i = 1, \cdots, m)$ 在 p 的充分小邻域内成立。

(3°) 可以选取 p 的某个邻域 U，使得 $F: U \to F(U)$ 是同胚映射($F(U)$ 上的拓扑是由 M_2 所诱导的相对拓扑)。

证明 (1°) 在 p 点任意取定一个局部坐标系 $\{x^i\}$，因为 $(\mathrm{rank}\, F)_p = m$，所以

$$\mathrm{rank}\left(\frac{\partial(y^i \circ F)}{\partial x^j}\right)_p = m,$$

当 $\{y^1, \cdots, y^n\}$ 适当排列后，可以使

$$\left.\frac{\partial(y^1 \circ F, \cdots, y^m \circ F)}{\partial(x^1, \cdots, x^m)}\right|_p \neq 0,$$

由 $y^i \circ F$ 关于 $x^1, \cdots, x^m$ 有连续偏导数及反函数定理推出 $\{y^1 \circ F, \cdots, y^m \circ F\}$ 是 p 的局部坐标系。

(2°) 在 q 任意取定一个局部坐标系 $\{y^1, \cdots, y^n\}$，使得 $\{y^1 \circ F, \cdots, y^m \circ F\}$ 成为 p 的局部坐标系(由(1°))，设

$$x^i = \varphi^i(y^1 \circ F, \cdots, y^m \circ F) \qquad (i = 1, \cdots, m),$$

其中 φ^i 是 C^r 函数。再设

$$z^j = \begin{cases} \varphi^j(y^1, \cdots, y^m) & (j = 1, \cdots, m), \\ y^j & (j = m+1, \cdots, n). \end{cases}$$

则

$$\left.\frac{\partial(z^1, \cdots, z^n)}{\partial(y^1, \cdots, y^n)}\right|_q = \left.\frac{\partial(z^1, \cdots, z^m)}{\partial(y^1, \cdots, y^m)}\right|_q = \left.\frac{\partial(\varphi^1, \cdots, \varphi^m)}{\partial(y^1, \cdots, y^m)}\right|_q \neq 0$$

(因为$\{x^i\}$和$\{y^i\circ F\}$都是p的局部坐标系)。由于z^i关于$y^1,\cdots,y^n$有连续偏导数及反函数定理推出$\{z^i\}$是q的局部坐标系，且明显地有$x^i=z^i\circ F(i=1,\cdots,m)$。

(3°) 把(2°)中所述的局部坐标系$\{x^i\}$和$\{z^i\}$的坐标邻域分别记为U和V，取U充分小可使$F(U)\subset V$。对于U中的点(以坐标表示点)$(\xi^1,\cdots,\xi^m)$，在映射F下对应于V中的点(以坐标表示)$(\xi^1,\cdots,\xi^m,\cdots,\xi^n)$。显然，$F:U\to F(U)$是同胚映射． #

定理 3 如果F是C^r映射，且$(\operatorname{rank}F)_p=n(m\geqslant n)$，则

(1°) 对于q的任意局部坐标系$\{y^1,\cdots,y^n\}$，存在p的局部坐标系$\{x^1,\cdots,x^m\}$，使得

$$x^i=y^i\circ F\quad(i=1,\cdots,n).$$

(2°) 对于p的任意邻域U，$q=F(p)$是$F(U)$的内点。

证明 (1°) 在p点任取一个局部坐标系$\{z^1,\cdots,z^m\}$。因为$\operatorname{rank}F=n$，所以当$\{z^1,\cdots,z^m\}$的次序适当安排后，有

$$\left.\frac{\partial(y^1\circ F,\cdots,y^n\circ F)}{\partial(z^1,\cdots,z^n)}\right|_p\neq 0,$$

设

$$x^i=\begin{cases}y^i\circ F & (i=1,\cdots,n),\\ z^i & (i=n+1,\cdots,m),\end{cases}$$

于是

$$\left.\frac{\partial(x^1,\cdots,x^m)}{\partial(z^1,\cdots,z^m)}\right|_p=\left.\frac{\partial(y^1\circ F,\cdots,y^n\circ F)}{\partial(z^1,\cdots,z^n)}\right|_p\neq 0,$$

由$y^i\circ F$关于z^i有连续偏导数及反函数定理推出$\{x^1,\cdots,x^m\}$是p的局部坐标系。

(2°) 把(1°)中所述的局部坐标系$\{x^1,\cdots,x^m\}$，$\{y^1,\cdots,y^n\}$的坐标邻域分别记为U_1和U_2，对于U_1中的点$(\xi^1,\cdots,\xi^m)$，由映射F对应于U_2中的点$(\xi^1,\cdots,\xi^n)$。因此，对于U_1的任意开子集U_0，显然$F(U_0)$是U_2的开子集．特别当U是p的邻域

时，$F(U\cap U_1)$是含$q=F(p)$的开集，因而q是$F(U)$的内点。＃

定理 4 如果F是C^r映射，且$(\mathrm{rank}F)_p=m=n$。则可选取p的适当邻域U和q的适当邻域V，使得

(1°) $F:U\to V$是同胚映射。

(2°) $F^{-1}:V\to U$是C^r映射。

证明 (1°) 在点p和q取局部坐标系$\{x^1,\cdots,x^n\}$和$\{z^1,\cdots,z^n\}$，它们的坐标邻域分别记为U和V'。我们可以选取U充分小，使得$F(U)\subset V'$，且$x^i=z^i\circ F(i=1,\cdots,n)$（由定理 2）。因为$(\mathrm{rank}F)|_U=n$及定理 3(2°) 推出$V=F(U)$是$M_2$的开集。再由定理 2 (3°)的证明可看出

$$F:U\to F(U)=V$$

是同胚映射。

(2°) 由反函数定理，

$$F^{-1}:V=F(U)\to U \text{ 是 } C^r \text{ 映射}.$$ ＃

推论 1 如果$F:M_1\to M_2$是一一的C^r映射，且$(\mathrm{rank}F)|_{M_1}=m=n$，则$F^{-1}:M_2\to M_1$也是$C^r$映射，因而$F$和$F^{-1}$都是$C^r$微分同胚。

(或由反函数定理直接推出)

2.2 习　　题

1. 证明例 1 中所述诸结论。

2. 设$(M_i,\mathscr{D}_i)$是C^r流形$(i=1,2,3)$，$F_1:M_1\to M_2$，$F_2:M_2\to M_3$都是C^k映射$(r\geqslant k\geqslant 1)$，$p_3=F_2(p_2)$，$p_2=F_1(p_1)$。

(1°) 证明：$F_2\circ F_1:M_1\to M_3$也是C^k映射。

(2°) 证明：$\mathrm{rank}(F_2\circ F_1)_{p_1}\leqslant\min\{(\mathrm{rank}F_1)_{p_1},(\mathrm{rank}F_2)_{p_2}\}$。

(3°) 举出例子，使得$\mathrm{rank}F_1\neq 0$，$\mathrm{rank}F_2\neq 0$，但$\mathrm{rank}(F_2\circ F_1)=0$。

(4°) 证明：两个浸入的复合还是浸入；两个嵌入的复合还是嵌入；两个微分同胚的复合还是微分同胚。

3. 设在拓扑流形 M 上，由 $\mathscr{D}_1'$ 和 $\mathscr{D}_2'$ 分别确定了两个 C^r 的微分构造 $\mathscr{D}_1$ 和 $\mathscr{D}_2$，证明：$\mathscr{D}_1=\mathscr{D}_2 \Longleftrightarrow$ 恒等映射 $I:M\to M$ 是从 $(M,\mathscr{D}_1)$ 到 $(M,\mathscr{D}_2)$ 的 C^r 微分同胚。

4. 在 $M=R^1$ 上构造两个不同的 C^∞ 微分构造，并使所得的微分流形是微分同胚的。

5. (1°) 设

$$f(x)=\begin{cases} x^{2r+1}\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0. \end{cases}$$

证明：$F:R^1\to R^2$，$F(x)=(x,f(x))$ 是 C^r 浸入，但不是 C^{r+1} 映射。

(2°) 设 $\varphi(x)$ 为 C^0 函数，但非 C^1 函数，而

$$f(x)=\int_0^x dx_1\int_0^{x_1}dx_2\int_0^{x_2}dx_3\cdots\int_0^{x_{r-1}}\varphi(x_r)dx_r,$$

证明：$F(x)=(x,f(x))$ 是 C^r 浸入，但不是 C^{r+1} 映射。

6. 设 $F:S^1\to R^2$，$F(\theta)=(x(\theta),y(\theta))=\left(\dfrac{\cos\theta}{1+\sin^2\theta},\ \dfrac{-\sin\theta\cdot\cos\theta}{1+\sin^2\theta}\right)$，则 $F(S^1)$ 为双纽线：$(x^2+y^2)^2=x^2-y^2$，且 F 是浸入。

7. C^k $(k\geqslant 1)$ 浸入是否是整体的一一映射？整体的一一浸入是否是嵌入？举例说明。

8. 设 $V^n=\left\{(x^1,\cdots,x^n)\ \middle|\ \sum\limits_{i=1}^n (x^i)^2<1\right\}$，$p,q\in V^n$，证明：存在一个 C^∞ 微分同胚

$$F:V^n\to V^n,$$

使得

$$F(p)=q.$$

9. 在 $V^2=\{(x,y)\mid x^2+y^2<1\}$ 中，已给弧

$$x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=1,$$

证明 存在一个 C^∞ 的微分同胚 $F:V^2\to V^2$，它将这弧映为直线段 $y=0$。

10. 设 $(M_1,\mathscr{D}_1)$ 和 $(M_2,\mathscr{D}_2)$ 分别是 m 维和 n 维的 C^r 流形，$(M_1\times M_2,$

$\mathscr{D}$)是 C^r 积流形。

$$I_i: M_i \to M_1 \times M_2 \quad (i=1,2),$$

$$I_1(x^1)=(x^1,x_0^2), \quad I_2(x^2)=(x_0^1,x^2),$$

则 I_1 和 I_2 是 C^r 嵌入。

11. 设$(M,\mathscr{D})$,$(M_i,\mathscr{D}_i)$ $(i=1,\cdots,k)$分别是 n,n_i 维的 C^r 流形。

$$F: M \to M_1 \times \cdots \times M_k$$

是映射，$F(p)=(F_1(p),\cdots,F_k(p))$, $p\in M$。则

F 是 C^r 映射$\Longleftrightarrow F_i: M\to M_i (i=1,\cdots,k)$是 C^r 映射。

12. 证明 由矩阵乘法给出的映射 $F: M(m,n)\times M(n,k)\to M(m,k)$ 是 C^∞ 的。

13. 设映射 $\pi: T(n,R^{n+k})\to G_{k,n}$ 将$(v_1,\cdots,v_n)$ 映为由 $v_1,\cdots,v_n$ 张成的 n 维子空间，证明 π 是 C^∞ 的。

14. 证明 $G_{k,n}$ 和 $G_{n,k}$ 是 C^∞ 微分同胚的（即存在一个 C^∞ 的微分同胚 $F: G_{k,n}\to G_{n,k}$）。

15. 定义：设$(M,\mathscr{D})$是 $C^r(r\geqslant 1)$ 流形，又是 A_2 空间。如果 M 的子集 $A=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, $A_n\subset U_n$，这里$(U_n,\varphi_n)\in\mathscr{D}$，且 $\varphi_n(A_n)$是零测集，则称 A 为零测集($\text{meas}A=0$)。

证明 零测集的定义与 A_n, U_n 的选取无关。

16. 证明 零测集的定义与下面任何一个等价：

(1°) 对于任何$(U,\varphi)\in\mathscr{D}$，$\varphi(A\cap U)$是零测集。

(2°) 存在$(U_n,\varphi_n)\in\mathscr{D}$，使得 $A=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(A\cap U_n)$$\left(\text{即} A\subset\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}U_n\right)$，且 $\varphi_n(A\cap U_n)$是零测集。

(3°) 任何 $p\in M$，存在 p 的邻域 U_p，$(U_p,\varphi_p)\in\mathscr{D}$，且 $\varphi_p(A\cap U_p)$ 是零测集。

17. 证明：零测集的任何子集是零测集，可数集合是零测集。有限个或可数个零测集的併是零测集

18. 如果对每个点 $p\in M$，有 p 的邻域 U_p（不必是坐标邻域），使得 $\text{meas}(A\cap U_p)=0$，则 $\text{meas}A=0$。

（如果题 15 中 A_2 空间条件去掉，则题 16、18 中的结论如何？并说明理由.）

19. 设$(M_1, \mathscr{D}_1)$和$(M_2, \mathscr{D}_2)$都是 n 维 $C^r(r\geqslant 1)$流形，又是 A_2 空间，F: $M_1\to M_2$ 是 C^1 映射，如果 $\text{meas}A=0$，则 $\text{meas}F(A)=0$.

（如果 A_2 空间条件去掉，结论如何？）

20. 设$(M_1, \mathscr{D}_1)$和$(M_2, \mathscr{D}_2)$分别是 m 维和 n 维 C^r 流形$(r\geqslant 1)$，且又是 A_2 空间，$F: M_1\to M_2$ 是 C^1 映射. 如果 $m<n$，则 $\text{meas}F(M_1)=0$.

21*. 定义：设$(M_1, \mathscr{D}_1)$和$(M_2, \mathscr{D}_2)$分别是 m 维和 n 维的 C^r 流形 $(r\geqslant 1)$，$F: M_1\to M_2$ 是 C^k 映射$(1\leqslant k\leqslant r)$. 如果$(\text{rank}F)_p<n$，$p\in M_1$，则 p 称为 **F 的临界点**. 如果

$$(\text{rank}F)_p=n, p\in M_1,$$

则 p 称为 F 的**正则点**.

如果 $q\in M_2$，使得 $F^{-1}(q)$ 至少包含一个临界点，则称它为**临界值**. M_2 的其它点称为**正则值**.

显然，如果 $m<n$，则 M_1 的所有点都是临界点. 此外，如果 $q\in M_2$，且 $q\overline{\in}F(M_1)$，则它是正则值.

证明：**Sard 定理** 设$(M_1, \mathscr{D}_1)$和$(M_2, \mathscr{D}_2)$分别是 m 维和 n 维 C^r 流形$(r\geqslant 1)$，$F: M_1\to M_2$ 是 C^k 映射$(1\leqslant k\leqslant r)$. 如果

$$k-1\geqslant \max(m-n, 0),$$

则 F 的临界值形成的集合是零测集. （题 20 是 Sard 定理的特殊情形.）

此定理的证明参考 Shlomo Sternberg[4] 47—55 页.

注意：Sard 定理中条件 $k-1\geqslant\max(m-n,0)$ 是必须的. 不等式不成立情形的反例是由 Whitney[2]给出的.

2.3 子流形和正则子流形

1. 子流形和正则子流形

定义 1 设$(W, \mathscr{D}_2)$是 n 维 C^r 流形$(r\geqslant 1)$，$M\subset W$，如果 M 有一个拓扑（不一定是 W 的诱导拓扑）及一个 m 维的 C^r 流形构造 $\mathscr{D}_1$，且满足：

(1°) 包含映射 $I: M\to W$，$I(p)=p(p\in M)$是 C^r 的.

(2°) $(\mathrm{rank} I)_p = m\ (p \in M)$。

即 I 是一一的 C^r 浸入，我们称 $(M, \mathscr{D}_1)$ 为 $(W, \mathscr{D}_2)$ 的 **C^r 子流形**．通常，简单地说成 M 是 W 的 C^r 子流形．

特别地，当 M 上的预先给定的拓扑(称为**内部拓扑**)和由 W 所诱导的 M 的**相对拓扑**一致时(即 I 是一个 C^r 嵌入)，则称 M 为 W 的 **C^r 正则子流形**．

定理 1 设 $(M, \mathscr{D}_1)$ 和 $(W, \mathscr{D}_2)$ 分别是 m 维和 n 维的 C^r 流形，

$$\mathscr{D}_1 = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}, \mathscr{D}_2 = \{(V_\beta, \psi_\beta)\},$$

而

$$F: M \to F(M) \subset W$$

是一个映射．

(1°) 如果 F 是一一的 C^r 浸入，则 $(F(M), \tilde{\mathscr{D}}_1)$ $(\tilde{\mathscr{D}}_1 = \{(F(U_\alpha), \varphi_\alpha \circ F^{-1})\})$ 是 $(W, \mathscr{D}_2)$ 的 C^r 子流形。

(2°) 如果 F 是一个 C^r 嵌入，则 $(F(M), \tilde{\mathscr{D}}_1)$ 是 $(W, \mathscr{D}_2)$ 的 C^r 正则子流形．

证明 (1°) 设 $I: F(M) \to W$ 是包含映射，则

$$\psi_\beta \circ I \circ (\varphi_\alpha \circ F^{-1})^{-1} = \psi_\beta \circ I \circ F \circ \varphi_\alpha^{-1} = \psi_\beta \circ F \circ \varphi_\alpha^{-1}$$

是 C^r 的，且 $\mathrm{rank} I = \mathrm{rank} F = m$，所以 I 是一一的 C^r 浸入，即 $F(M)$ 是 W 的 C^r 子流形．

(2°) 如果 F 是嵌入，显然 $F(M)$ 预先给定的内部拓扑和由 W 所诱导的 $F(M)$ 的相对拓扑是一致的，再由(1°)得到 $F(M)$ 是 W 的 C^r 正则子流形． #

例 1 在 2.1 的例 2 中，显然 $(U, \mathscr{D}_1)$ 是 $(M, \mathscr{D})$ 的 C^r 正则子流形，称 U 为 M 的 **C^r 开子流形**．

例 2 在 2.2 的例 1 中，由一一的 C^∞ 浸入(而不是嵌入) F_i $(i=1,2)$ 的参数表示，给双纽线引进了两个 C^∞ 构造，使它成为 R^2 的一维 C^∞ 子流形(非正则) $(F_i(R^1), \mathscr{D}_i)$ $(i=1,2)$。显然 $F_1(R^1) = F_2(R^1)$，但 $\mathscr{D}_1 \neq \mathscr{D}_2$ (恒等映射 I 不连续)。

例 3 在 2.1 的例 5 中给出的 S^2 是 R^3 的 C^∞ 正则子流形.

事实上,显然包含映射 $I: S^2 \to S^2 \subset R^3$ 是同胚. 如果我们选取特殊坐标系,例如:

$$I_{R^3} \circ I \circ (\varphi_3^+)^{-1}(x, y) = (x, y, z)$$

(其中 I_{R^3} 表示 R^3 的恒等映射),则其 Jacobi 矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \dfrac{\partial z}{\partial x} & \dfrac{\partial z}{\partial y} \end{pmatrix},$$

它的秩为 2,因而 I 是一个 C^∞ 嵌入,即 S^2 是 R^3 的 C^∞ 正则子流形.

例 4 设环面

$$S^1 \times S^1 = \{(e^{2\pi\theta_1 i}, e^{2\pi\theta_2 i})\}.$$

它可以表示为对边等同的正方形. 也可将平面 R^2 上的点划分成等价类,使得 $(\theta_1, \theta_2) \sim (\theta_1', \theta_2') \Longleftrightarrow \theta_1' = \theta_1 + k_1$, $\theta_2' = \theta_2 + k_2$, 这里 k_1, k_2 为整数. 于是,商空间 $R^2/\sim$ 就是环面 $S^1 \times S^1$.

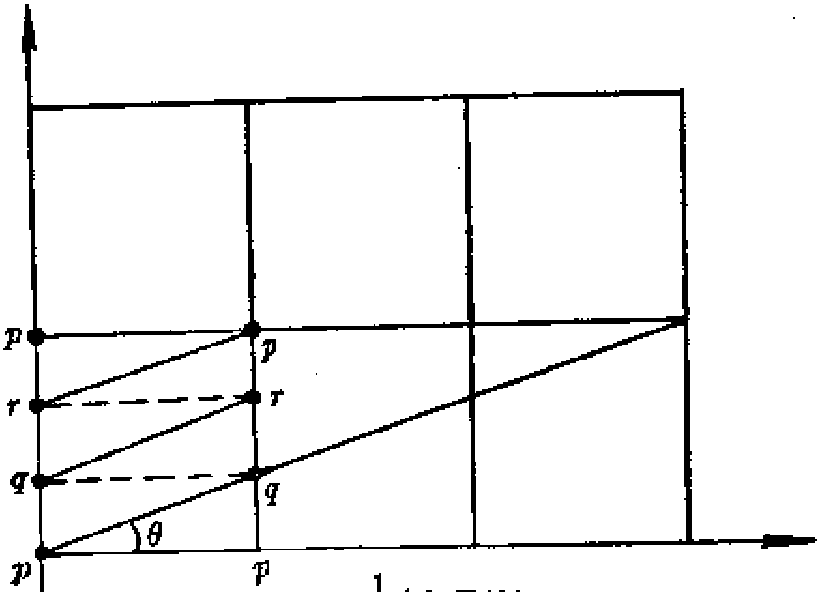
由 $F(t) = (e^{2\pi ti}, e^{2\pi\alpha ti})$ 定义了一个 C^∞ 映射

$$F: R^1 \to S^1 \times S^1.$$

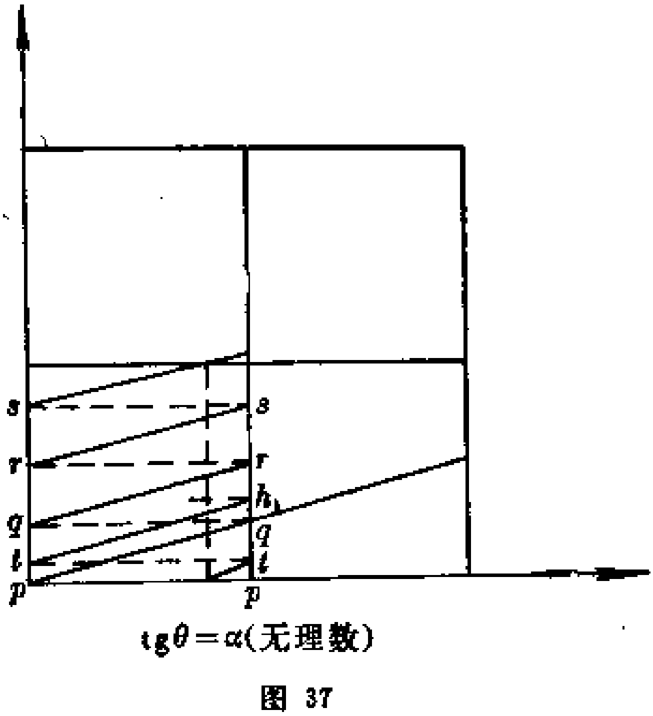
当 α 是有理数时,容易看出点集 $F(R^1)$ 是 $S^1 \times S^1$ 上的一条封闭曲线,它作为 $S^1 \times S^1$ 的子拓扑空间同胚于 S^1. 不难验证 $F(R^1)$ 是 $S^1 \times S^1$ 的紧致的 1 维正则子流形(注意: F 是非一一的 C^∞ 浸入).

当 α 是无理数时, $F: R^1 \to F(R^1) \subset S^1 \times S^1$ 是一一的 C^∞ 浸入,因而 $(F(R^1), F^{-1})$ 作为微分构造的基, 确定了一个 C^∞ 流形, 它是 $S^1 \times S^1$ 的子流形 (参看图 37). 然而, $F(R^1)$ 在 $S^1 \times S^1$ 内是稠密的, 即 $\overline{F(R^1)} = S^1 \times S^1$(留作习题). 所以, $F: R^1 \to F(R^1) \subset S^1 \times S^1$ 不是同胚映射. 这就推出了包含映射 I: $F(R^1) \to F(R^1) \subset S^1 \times S^1$ 不是同胚映射,因而 $F(R^1)$ 不是 $S^1 \times S^1$ 的正则

子流形.



$\text{tg}\ \theta=\alpha=\frac{1}{3}$(有理数)



$\text{tg}\theta=\alpha$(无理数)

图 37

2. 正则子流形的性质

定理 2 设W是n维C^r流形($r\geqslant 1$),则M是W的m维C^r正则子流形$\Longleftrightarrow M\subset W$,且对任何$p\in M$,存在$W$的含$p$的局部坐标系$\{y^1,\cdots,y^n\}$及其坐标邻域$U$,使得

$$M\cap U=\{q\in U\,|\,y^j(q)=0,\ m+1\leqslant j\leqslant n\}.$$

证明 （⇒）在p点取W的局部坐标系$\{x^1,\cdots,x^n\}$，使$\{x^1\circ I,\cdots,x^m\circ I\}$是$M$在$p$点的局部坐标系（包含映射$I$：$M\to W$是一个嵌入）。设$\{x^1,\cdots,x^n\}$和$\{x^1\circ I,\cdots,x^m\circ I\}$的坐标邻域分别为$U_1$和$V$。因为$M$是$W$的正则子流形，所以可以取$W$上$p$的邻域$U_2$，使得

$$U_2\subset U_1,\quad M\cap U_2\subset V.$$

显然 $$x^k\circ I=g^k(x_1\circ I,\cdots,x^m\circ I)\quad(m+1\leqslant k\leqslant n)$$

是定义在$M\cap U_2$上的C^r函数。这里g^k的定义域叙述如下。设

$$\varphi:\ U_2\to R^m,$$

$$\varphi(q)=(x^1(q),\cdots,x^m(q))\quad(q\in U_2).$$

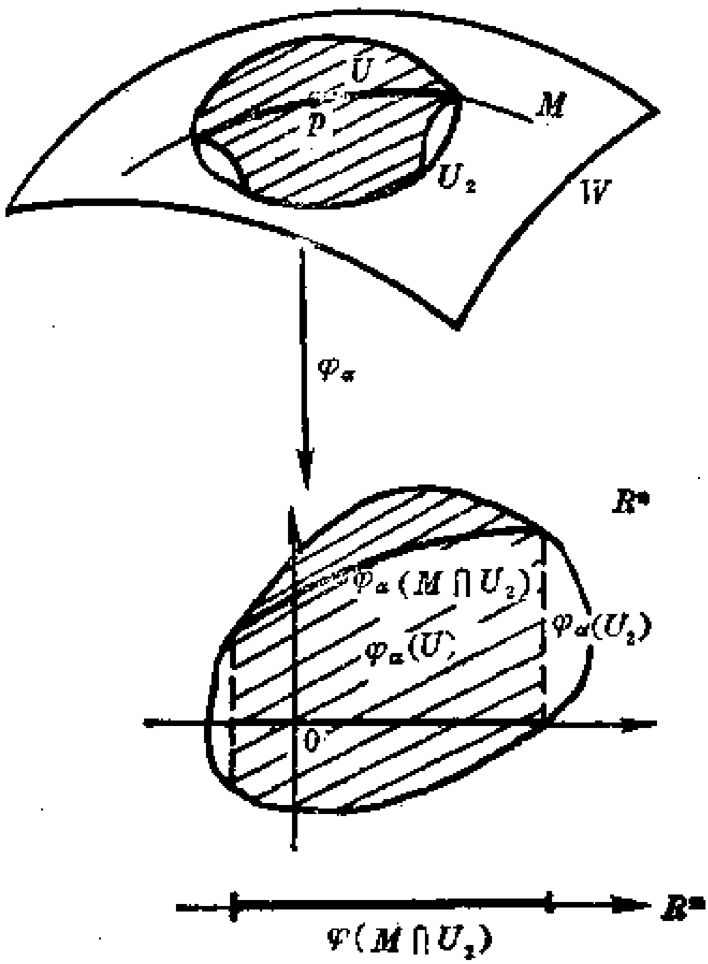


图 38

因此，g^k是定义在$\varphi(M\cap U_2)$（它是R^m的开集）上的C^r函数(参看图38)。

容易看出，如果$q\in U_2$的坐标为$\{a^1,\cdots,a^n\}=\{x^1(q),\cdots,x^n(q)\}$，则

$$q\in M\cap U_2 \Longleftrightarrow q\in U_2, a^k=g^k(a^1,\cdots,a^m)\ (m+1\leqslant k\leqslant n).$$

其次，在p点（关于W）的邻域

$$U=\varphi^{-1}(\varphi(M\cap U_2))$$

上定义 n 个C^r函数：

$$\begin{cases} y^1=x^1, \\ \cdots \\ y^m=x^m, \\ y^{m+1}=x^{m+1}-g^{m+1}(x^1,\cdots,x^m), \\ \cdots \\ y^n=x^n-g^n(x^1,\cdots,x^m). \end{cases}$$

我们令映射$\psi:U\to R^n$为

$$\psi(q)=(y^1(q),\cdots,y^n(q))\quad (q\in U).$$

显然 ψ: $U\to\psi(U)$是一对一的 C^r映射，且

$$\left.\frac{\partial(y^1,\cdots,y^n)}{\partial(x^1,\cdots,x^n)}\right|_q=\det\begin{pmatrix} I_m & 0 \\ * & I_{n-m} \end{pmatrix}=1,$$

由第二章 2.2 推论 1，$\{y^1,\cdots,y^n\}$是以U为坐标邻域的W的局部坐标系。于是，

$\{q\in U\,|\,y^j(q)=0,\ m+1\leqslant j\leqslant n\}=\{q\in U_2\,|\,\varphi(q)\in\varphi(M\cap U_2),\ x^k(q)=g^k(x^1(q),\cdots,x^m(q)), m+1\leqslant k\leqslant n\}=M\cap U_2=M\cap U$（由于$M\cap U\subset M\cap U_2$，且$U\supset M\cap U_2$，因而$M\cap U_2=M\cap U$）。

($\Leftarrow$) 设M上具有的拓扑是由W诱导的相对拓扑。对于任何$p\in M$，(U_p,φ_p)，$\{y^1,\cdots,y^n\}$是定理中所述的$\bar{p}$点(关于W)的局

部坐标系．记

$$R^m=\{(\xi^1,\cdots,\xi^m,0,\cdots,0)\}\subset R^n,$$

则

$$\varphi_p(M\cap U_p)=R^m\cap\varphi_p(U_p).$$

由于$\varphi_p(U_p)$是R^n的开集，所以$\varphi_p(M\cap U_p)$是R^m的开集．显然

$$\varphi_p|_{M\cap U_p}:\ M\cap U_p\to\varphi_p(M\cap U_p)\subset R^m$$

是同胚映射．

于是

$$\{(M\cap U_p,\varphi_p|_{M\cap U_p})\,|\,p\in M\}$$

确定了M上的一个C^r微分构造．事实上，显然有

$$M=\bigcup_{p\in M}(M\cap U_p).$$

此外，当$(M\cap U_p)\cap(M\cap U_q)\neq\phi$时$(p,q\in M)$，映射

$$\varphi_q|_{M\cap U_q}\circ\varphi_p|^{-1}_{M\cap U_p}:\varphi_p|_{M\cap U_p}(M\cap U_p\cap U_q)$$

$$\to\varphi_q|_{M\cap U_q}(M\cap U_p\cap U_q),$$

$$(y^1,\cdots,y^m,0,\cdots,0)\to(x^1,\cdots,x^m,0,\cdots,0)$$

$$\begin{cases}x^1=(\varphi_q\circ\varphi_p^{-1})_1(y^1,\cdots,y^m,0,\cdots,0),\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ x^m=(\varphi_q\circ\varphi_p^{-1})_m(y^1,\cdots,y^m,0,\cdots,0)\end{cases}$$

是C^r的，同理$\varphi_p|_{M\cap U_p}\circ\varphi_q|^{-1}_{M\cap U_q}$也是$C^r$的(参看图39)．

再由

$$\varphi_p\circ I\circ\varphi_p|^{-1}_{M\cap U_p}:\varphi_p|_{M\cap U_p}(M\cap U_p)\to\varphi_p(U_p),$$

$$(y^1,\cdots,y^m,0,\cdots,0)\to(y^1,\cdots,y^m,0,\cdots,0),$$

显然，I是一个C^r嵌入．这就证明了M是W的C^r子流形．#

定理 3 设M_1和M_2各为m维和n维的C^r流形$(r\geqslant1)$，

$$F:\ M_1\to M_2$$

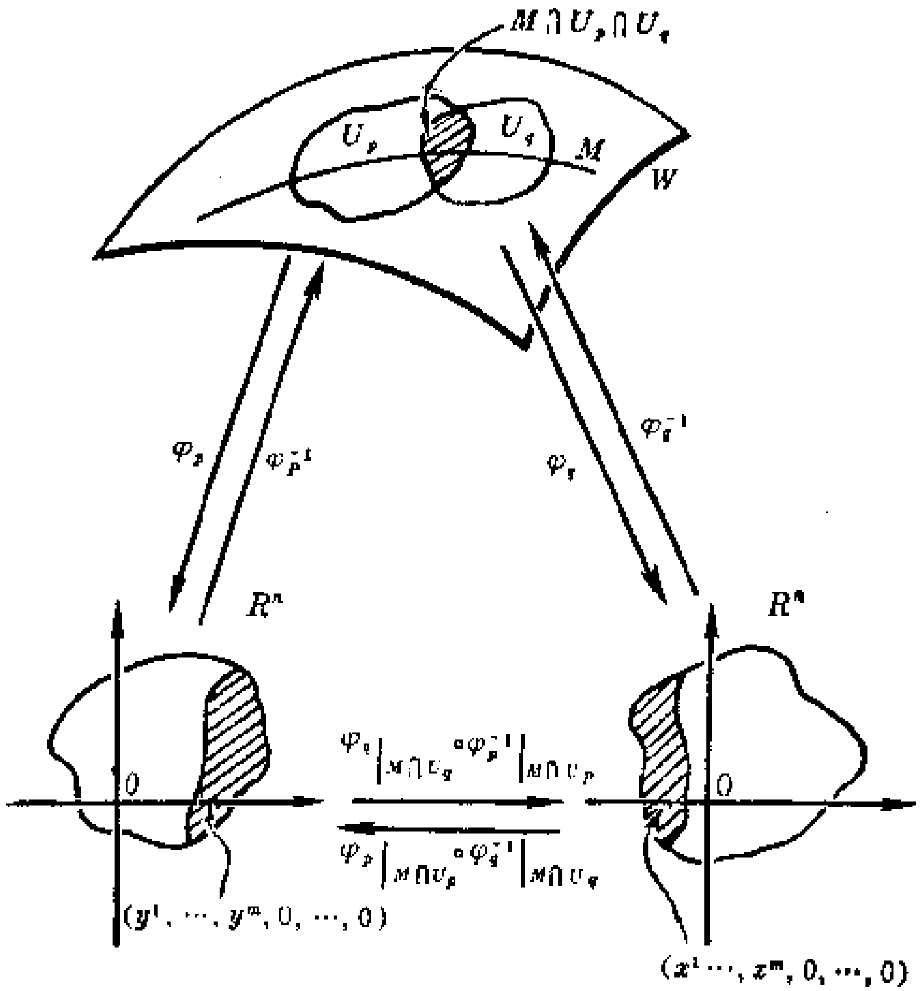


图 39

是C^r映射．如果

$$(\operatorname{rank} F)_p = l \text{（定数）} \ (p \in M_1),$$

则对于任何$q \in M_2$，逆象

$$F^{-1}(q) = \{p \in M_1 \mid F(p) = q\}$$

或者是空集，或者是M_1的$m-l$维正则子流形．

证明 假设$F^{-1}(q) = M \neq \phi$，$p \in M$．在点p，q处，M_1和M_2的局部坐标系各为$\{x^i\}$和$\{y^j\}$．在p的一个邻域内，令

$$\theta^j = y^j \circ F \quad (j = 1, \cdots, n),$$

显然$\theta^1, \cdots, \theta^n$是$C^r$函数．由于$\operatorname{rank}\left(\dfrac{\partial \theta^j}{\partial x^i}\right)_p = l$，所以当局部坐

标系适当地安排时，可以使

$$\left.\frac{\partial(\theta^1,\cdots,\theta^l)}{\partial(x^1,\cdots,x^l)}\right|_p\neq 0.$$

于是$\{\theta^1,\cdots,\theta^l,x^{l+1},\cdots,x^m\}$就成为$p$的局部坐标系. 用这个局部坐标系来代替$\{x^i\}$，则有

$$\theta^i=x^i\quad(i=1,\cdots,l).$$

由于在点 p 的某个连通邻域V_0上，$\mathrm{rank}\left(\frac{\partial\theta^i}{\partial x^j}\right)=l$，所以

$$0=\frac{\partial(\theta^1,\cdots,\theta^l,\theta^i)}{\partial(x^1,\cdots,x^l,x^j)}=\det\begin{pmatrix}I_l & 0\\ * & \frac{\partial\theta^i}{\partial x^j}\end{pmatrix}$$

$$=\frac{\partial\theta^i}{\partial x^j}\quad\begin{pmatrix}i=l+1,\cdots,n\\ j=l+1,\cdots,m\end{pmatrix},$$

这就推出了$\theta^{l+1},\cdots,\theta^n$仅是$x^1,\cdots,x^l$的函数. 设$y^j(q)=a^j\ (j=1,\cdots,n)$,并可假定$a^j=0$（否则用$y^j-a^j$代替$y^j$),于是

$$\begin{aligned}M\cap V_0&=\{p'\in V_0\mid F(p')=q\}\\&=\{p'\in V_0\mid\theta^j(p')=0,\ j=1,\cdots,n\}\\&=\{p'\in V_0\mid x^i(p')=0,\ i=1,\cdots,l\},\end{aligned}$$

因此，由定理 2 可以引进C^r流形构造,使M成为M_1的 $m-l$ 维正则子流形. ＃

例 5 设$M_1\subset R^m$是开集，$M_2=R^n$,映射

$$F:M_1\to R^n,$$

$$F(p)=(F_1(p),\cdots,F_n(p))\quad(p\in M_1)$$

是C^r的$(r\geqslant 1)$,其中$F_i\quad(i=1,\cdots,n)$是 C^r函数，且

$$(\mathrm{rank}F)_p=\mathrm{rank}\left(\frac{\partial F_i}{\partial x^j}\right)_p=l\quad(p\in M_1),$$

则从定理 3 推出，由方程组

$$\begin{cases} F_1(x^1,\cdots,x^m)=c^1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ F_n(x^1,\cdots,x^m)=c^n, \end{cases} \quad (c^i\text{是常数}) \qquad (1)$$

确定的解 $(x^1,\cdots,x^m)$ 的全体所组成的集合 $M\subset M_1$，或者是空集，或者是 M_1 的 $m-l$ 维的 C^r 正则子流形。显然 M 是 M_1 的闭集。(1) 称为 M 的**隐函数方程**。

例 6 设 $F: R^{n+1}\to R^1$,

$$F(x^1,\cdots,x^{n+1})=(x^1)^2+\cdots+(x^{n+1})^2,$$

它是 C^∞ 映射，$M_1=R^{n+1}-\{0\}$, $M_2=R^1$，显然，

$$(\operatorname{rank}F)_p=\operatorname{rank}(2x^1,\cdots,2x^{n+1})_p=1,\quad p\in M_1,$$

因此，

$$S^n=\left\{(x^1,\cdots,x^{n+1})\in R^{n+1}\,\middle|\,F(x^1,\cdots,x^{n+1})=\sum_{i=1}^{n+1}(x^i)^2=1\right\}$$

是 M_1(从而也是 R^{n+1})的 n 维正则子流形。

2.3 习 题

1. 用几种方法证明，柱面 $x^2+y^2=a^2(a>0)$ 和椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1(a>0,b>0,c>0)$ 是 2 维 C^∞ 流形。它们都是 R^3 的 C^∞ 正则子流形。

2. 证明：$GL(n,R)=\left\{\begin{pmatrix} a_{11}\cdots a_{1n} \\ \cdots\cdots \\ a_{n1}\cdots a_{nn}\end{pmatrix}=A\,\middle|\,\det A\neq 0\right\}$ 可以视作 R^{n^2} 中的开子流形。

3. 设 W 是 n 维 C^r 流形($r\geqslant 1$)，$M\subset W$，且对任何 $p\in M$，存在 W 的含 p 的坐标邻域 U 及局部坐标系 $\{x^i\}$，使得

$$M\cap U=\{q\in U\mid \varphi_i(q)=0,1\leqslant i\leqslant n-m\},$$

其中 $\varphi_1,\cdots,\varphi_{n-m}$ 是 C^r 函数，且 $\operatorname{rank}\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial x^j}\right)_U=n-m$，则 M 是 W 的 m 维 C^r 正则子流形。

4. (1°) 题 3 中 $\operatorname{rank}\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial x^j}\right)_U=n-m$ 改为 $\operatorname{rank}\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial x^j}\right)_{M\cap U}=n-m$，结论成立吗？

(2°) 在定理 3 中 $(\operatorname{rank} F)_{M_1}=l$ 改为 $(\operatorname{rank} F)_{F^{-1}(q)}=l$，结论成立吗？

(3°) 在例 5 中 $(\operatorname{rank} F)_{M_1}=l$ 改为 $(\operatorname{rank} F)_M=l$，结论成立吗？

5. 参看 2.2 题 5. 证明：

$$M=\left\{(x,f(x))\;\middle|\; f(x)=\begin{cases}x^{2r+1}\sin\frac{1}{x}, & x\neq0,\\ 0 & ,x=0,\end{cases}\right\}$$

是 R^2 的 C^r 正则子流形，但非 C^{r+1} 正则子流形。

6. 证明：$M=\{(x,f(x))\mid f(x)=|x|\}$ 不能成为 R^2 的 C^r 子流形 $(r\geqslant 1)$。

7. 在例 5 中，如果 $l=n$，直接利用隐函数定理证明，M 是空集，或者是 M_1 的(从而也是 R^m 的) $m-n$ 维的 C^r 正则子流形。

8. 利用第二章 §1 推论 2 和推论 3 证明本节定理 2 的必要性和定理 3.

9. (1°) 设 $x^{n+1}=f(x^1,\cdots,x^n)$ 关于 $x^1,\cdots,x^n$ 有 r 阶连续偏导数。证明：超曲面

$$x^{n+1}=f(x^1,\cdots,x^n)$$

是 R^{n+1} 的 n 维 C^r 正则子流形。

具体给出此超曲面的形如定理 2 中所述的特殊坐标系。

(2°) 具体给出 $S^n=\{(x^1,\cdots,x^{n+1})\mid(x^1)^2+\cdots+(x^{n+1})^2=1\}$ 的形如定理 2 中所述的特殊坐标系。

(3°) 证明：R^n 中任何 k 维平面是 R^n 的 k 维 C^∞ 正则子流形。

(4°) 证明：圆柱面 $x^2+y^2=a^2\,(a>0)$ 上的螺旋线 $(x,y,z)=(a\cos\theta,a\sin\theta,b\theta+c)$ $(b\neq0)$ 是该圆柱面的 1 维 C^∞ 正则子流形。

(5°) 证明：通常的环面

$$(x,y,z)=((b+a\cos\theta)\cos\varphi,(b+a\cos\theta)\sin\varphi,a\sin\theta)\quad(0<a<b)$$

是 R^3 中的 2 维 C^∞ 正则子流形。

10*. 证明：(1°) 例 4 中 $F(R^1)$ 在 $S^1\times S^1$ 内是稠密的.

(提示：当 α 是无理数时，$n\alpha-[n\alpha]$ 在 $[0,1]$ 内是稠密的.)

(2°) F 和 I 不是同胚映射.

11. 设 M_1 和 M_2 是 C^r 流形 $(r\geqslant 1)$，M 是 M_2 的 C^r 子流形（不必正则）. $F: M_1\to M_2$ 是 C^r 映射，且满足：

(1°) $F(M_1)\subset M$.

(2°) $F: M_1\to M$ 是 C^0 映射（关于 M 的内部拓扑而言）.

证明 $F: M_1\to M$ 是 C^r 映射.

12. 设 M_1 和 M_2 是 C^r 流形 $(r\geqslant 1)$，M 是 M_2 的正则子流形，$F: M_1\to M_2$ 是 C^r 映射，且满足 $F(M_1)\subset M$. 证明：$F: M_1\to M$ 是 C^r 映射.

13. 设 $(M_1,\mathscr{D}_1)$ 和 $(M_2,\mathscr{D}_2)$ 是 C^r 流形 $(M,\mathscr{D})$ 的两个 C^r 的正则子流形，如果集合 $M_1=M_2$，则 $\mathscr{D}_1=\mathscr{D}_2$（正则子流形的 C^r 流形构造的一致性）.

14. (1°) 对于非正则的子流形，题 13 的结论不成立（参看例 2 中的双纽线）.

(2°) 题 11 中的条件 (2°) 能否删去？举例说明.

15. 证明 第二章 §2.1 例 8 中的 $M(m,n;k)$ 是 $M(m,n)$ 的 C^∞ 正则子流形.

16. 在定理 3 中，如果 M_1 是紧致的. 证明：$F^{-1}(q)$ 至多只有有限个连通分支.

举出连通的非紧致的流形 M_1，使得 $F^{-1}(q)$ 有无限个连通分支.

17. 设 $M=\{(x,y)\in R^2\,|\,|x|+|y|=1\}$，$(M,\tau)$ 为 R^2 的通常拓扑空间的子拓扑空间.

问：(1°) (M,τ) 是否存在 C^∞ 流形构造.

(2°) (M,τ) 是否存在 C^∞ 流形构造，使其成为 R^2 的子流形. 并说明理由.

(3°) 如果在 (2°) 中将"子流形"改为"正则子流形"，结论如何？并说明理由.

§3 1的分解

1. 仿紧和σ紧

定义 1 如果T_2拓扑空间(M,τ)具有性质：$M=\bigcup_{k=1}^{\infty}G_k$，$G_k$是$M$的开集，闭包$\overline{G}_k$是紧致的，且$\overline{G}_k\subset G_{k+1}(k=1,2,\cdots)$，则称$M$是$\sigma$紧的。

定义 2 设(M,τ)是拓扑空间，$\{U_\alpha\}$是M的一族子集，如果对每个点$p\in M$，有一个p的邻域W_p，使得W_p只与有限个U_α相交，即除有限个α外，$W_p\cap U_\alpha=\phi$，则称$\{U_\alpha\}$是**局部有限**的。

定义 3 一个覆盖$\{V_\beta\}$称为覆盖$\{U_\alpha\}$的**精致**，如果对每个β，至少存在一个α，使得$V_\beta\subset U_\alpha$。

拓扑空间(M,τ)称为**仿紧**的，如果它是T_2空间，并且对每个开覆盖有一个局部有限的开精致。

例 1 紧致的T_2拓扑空间(M,τ)既是σ紧的(取$G_k=M$)，又是仿紧的(任何开覆盖必有有限的子开覆盖，它就是局部有限的精致。)

定理 1 (1°) 如果拓扑空间(M,τ)是局部紧致的，且又是A_2和T_2空间，则(M,τ)是σ紧的。

(2°) 如果(M,τ)是σ紧的，则(M,τ)是仿紧的。

证明 (1°) M是局部紧的，即对任何$p\in M$，存在p的邻域U_p，使$\overline{U}_p$是紧致的。由于M是A_2空间，根据Lindelöf定理推出M的开覆盖$\{U_p|p\in M\}$有可数的子开覆盖$\{U_i=U_{p_i}\}$。我们归纳定义G_k如下：设$G_1=U_1$，则$\overline{G}_1=\overline{U}_1$是紧致的。假定$G_k$已被定义，取$j>k$，并且使$\overline{G}_k\subset\bigcup_{i=1}^{j}U_i$，不仿设$j$是满足上述条件

的最小正整数. 记 $G_{k+1}=\bigcup_{i=1}^{j}U_i$，它是开集，而 $\overline{G}_{k+1}=\bigcup_{i=1}^{j}\overline{U}_i$ 是紧致的，显然 $\overline{G}_k\subset G_{k+1}$，$\bigcup_{k=1}^{\infty}G_k=\bigcup_{i=1}^{\infty}U_i=M$，这就推出了 M 是 σ 紧的.

(2°) 设 $\{W_\alpha\}$ 是 M 的任何开覆盖. 对每个 k，考虑开集 $(G_{k+2}-\overline{G}_{k-1})\cap W_\alpha$. 这些集合覆盖紧致集 $\overline{G}_{k+1}-G_k$. 因此，我们可以选取有限的子开覆盖 $\{V_1^k,\cdots,V_{n(k)}^k\}$. 因为

$$\bigcup_{k=0}^{\infty}(\overline{G}_{k+1}-G_k)=M\quad(G_0=G_{-1}=\phi),$$

覆盖 $\{V_1^k,\cdots,V_{n(k)}^k\mid k=0,1,2,\cdots\}$ 是 $\{W_\alpha\}$ 的开精致. 对于任何 $x\in M$，G_{k+1} 是 x 的一个邻域，则 $G_{k+1}\cap V_i^j=\phi$，$j>k+1$. 于是，$\{V_1^k,\cdots,V_{n(k)}^k\mid k=0,1,2,\cdots\}$ 是局部有限的. 这就证明了 (M,τ) 是仿紧的. #

推论1 如果 M 是 n 维流形，且又是 A_2 空间，则 M 是 σ 紧的，因而也是仿紧的.

证明 对任何 $p\in M$，取 p 的坐标邻域 (U_p,φ_p)，使得 $\varphi_p(U_p)=V_1^n=\{x\in R^n\mid\|x\|<1\}$. 由于流形 M 是 T_2 空间，所以开集 $\varphi_p^{-1}\left(\left\{x\in R^n\mid\|x\|<\frac{1}{2}\right\}\right)$ 的闭包 $\varphi_p^{-1}\left(\left\{x\in R^n\mid\|x\|\leqslant\frac{1}{2}\right\}\right)$ 是紧致的. 这就推出了 M 是局部紧的. 再由定理 1，M 是 σ 紧的，因而也是仿紧的. #

定理 2 设 M 是 n 维 σ 紧的流形，$\{W_\alpha\}$ 是 M 的任一开覆盖. 则存在坐标邻域

$$\{(U_i,\varphi_i)\mid i=1,2,\cdots\},$$

使得满足:

(1°) $\{U_i\}$ 是 $\{W_\alpha\}$ 的局部有限的精致.

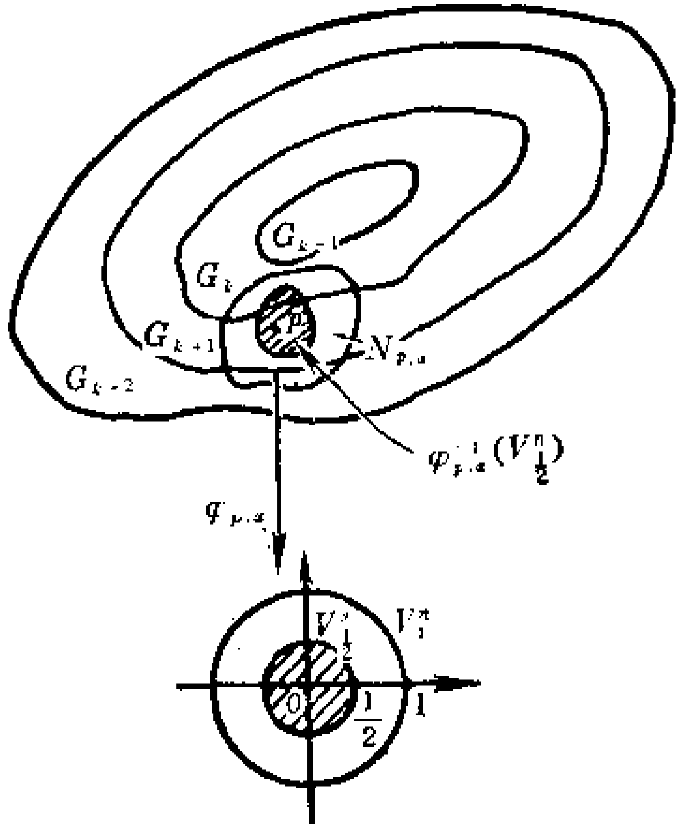


图 40

(2°) $\varphi_i(U_i)=V^n_1$.

(3°) $\{\varphi_i^{-1}(V^n_{\frac{1}{2}})\,|\,i=1,2,\cdots\}$ 也是 M 的局部有限的开覆盖，其中 $V^n_{\frac{1}{2}}=\left\{x\in R^n\,|\,\|x\|<\frac{1}{2}\right\}$.

证明 设 $\{W_\alpha\}$ 是 M 的任何开覆盖. 对每个 k，及任何 $p\in(G_{k+2}-\overline{G}_{k-1})\cap W_\alpha$，有 p 的坐标系 $(N_{p,\alpha},\varphi_{p,\alpha})$，使得 $N_{p,\alpha}\subset(G_{k+2}-\overline{G}_{k-1})\cap W_\alpha$，并且 $\varphi_{p,\alpha}(N_{p,\alpha})=V^n_1$. 选取有限个 $\varphi_{p,\alpha}^{-1}(V^n_{\frac{1}{2}})$（因而 $N_{p,\alpha}$ 也是有限个）覆盖紧致集 $\overline{G}_{k+1}-G_k$. 然后，类似于定理 1(2°)的证法可推出本定理的结论. #

2.1 的分解

引理 1 (1°) $$g(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0,\end{cases}$$

是 C^∞ 函数。

(2°) 设 $f: R^n \to R^1$,其中

$$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{\left(\frac{1}{4}-\|x\|^2\right)^2}}, & \|x\|<\frac{1}{2}, \\ 0, & \|x\|\geqslant\frac{1}{2}, \end{cases}$$

则 f 是 C^∞ 的.

证明 (1°) 只须用归纳法证明

$$g^{(m)}(x)=\begin{cases} p_m\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}, & x>0, \\ 0, & x\leqslant 0, \end{cases}$$

其中 $p_m\left(\frac{1}{x}\right)$是$\frac{1}{x}$的多项式.

(a) 当 $m=0$ 时,命题显然成立.

(b) 设 $m=k$ 时,命题成立,即

$$g^{(k)}(x)=\begin{cases} p_k\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}, & x>0, \\ 0, & x\leqslant 0, \end{cases}$$

其中 $p_k\left(\frac{1}{x}\right)$为$\frac{1}{x}$的多项式. 则当 $m=k+1$ 时,命题也成立. 事实上,由 L'Hospital 法则,

$$\lim_{x\to 0}\frac{p_k\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}-0}{x}=\lim_{u\to\infty}\frac{p_k(u)\cdot u}{e^{u^2}}$$

$$=\lim_{u\to\infty}\frac{p_k(u)\cdot u}{e^u}\cdot\frac{1}{e^{u^2\left(1-\frac{1}{u}\right)}}=0\cdot 0=0.$$

所以,

$$g^{(k+1)}(x)=\begin{cases}\left[p'_k\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)+p_k\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{2}{x^3}\right]e^{-\frac{1}{x^2}}, & x>0,\\ \lim\limits_{x\to0}\dfrac{p_k\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}-0}{x-0}, & x=0,\\ 0, & x<0,\end{cases}$$

$$=\begin{cases}p_{k+1}\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0.\end{cases}$$

(2°) 设 $\varphi(x)=\frac{1}{4}-\|x\|^2=\frac{1}{4}-[(x^1)^2+\cdots+(x^n)^2]$，显然是 C^∞ 的. 容易看出,

$$f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{\left(\frac{1}{4}-\|x\|^2\right)^2}}, & \|x\|<\frac{1}{2},\\ 0, & \|x\|\geqslant\frac{1}{2},\end{cases}=g(\varphi(x)),$$

因此,由 g 和 φ 的 C^∞ 性推出 f 也是 C^∞ 的. #

定义 4 所谓 $C^r(r\geqslant1)$ 流形 $(M,\mathscr{D})$ 上的一个 **1 的分解**是一族 C^r 函数

$$\{g_i\geqslant0\mid i=1,2,\cdots\}$$

使得:

(1°) $\{\mathrm{Supp}\,g_i\}$ 是局部有限的，其中

$$\mathrm{Supp}\,g_i=\overline{\{x\in M\mid g_i(x)\neq0\}}$$

称为 g_i 的**支柱**.

(2°) $\mathrm{Supp}\,g_i$ 是紧致的.

(3°) $\sum\limits_{i=1}^{\infty}g_i(x)=1,\ x\in M.$

由(1°),显然对每个 $p\in M$,有一个 p 的邻域 W_p，使得(3°)中的和在 W_p 中只有有限项 $g_i(x)\neq0$.

定义 5 设 $(M,\mathscr{D})$ 是 n 维 $C^r(r\geqslant1)$ 流形，$\{W_i\mid i=1,2,\cdots\}$

是 M 的一个局部有限的开覆盖，$\{g_i | i=1,2,\cdots\}$ 是 $(M,\mathscr{D})$ 的一个 1 的分解，如果对每个 i，$\mathrm{Supp}g_i \subset W_i$，则称 $\{g_i | i=1,2,\cdots\}$ 为附属于 $\{W_i | i=1,2,\cdots\}$ 的一个 1 的分解。

定理 3 设 $(M,\mathscr{D})$ 是 n 维 $C^r(r\geqslant 1)\sigma$ 紧的流形，则存在一个 1 的分解 $\{g_i\}$。

证明 设 $\{(U_i,\varphi_i) | i=1,2,\cdots\}$，$V_i=\varphi_i^{-1}(V_{\frac{n}{2}})$ $(i=1,2,\cdots)$ 为定理 2 中所述。作函数

$$\psi_i: M\to R^1,$$

$$\psi_i(x)=\begin{cases} f\circ\varphi_i(x), & x\in U_i, \\ 0 & ,x\overline{\in} U_i, \end{cases} \quad (f \text{ 是引理 1 中的函数})$$

容易看出 ψ_i 是 C^r 的，且

$$\psi_i(x)\begin{cases} >0, & x\in V_i, \\ =0, & x\overline{\in} V_i. \end{cases}$$

由定理 2，$\{V_i\}$ 是 M 的局部有限的开覆盖，则对任何 $p\in M$，存在 p 的邻域 W_p，使除有限个 V_i 外，有 $V_i\cap W_p=\phi$，即除有限个 ψ_i 外，

$$\psi_i|_{W_p}\equiv 0. \tag{1}$$

此外，对任何 $p\in M$，由 $\{V_i\}$ 是 M 的开覆盖，故至少存在一个含 p 的 V_i，于是 $\psi_i(p)>0$。从

$$0<\sum_{i=1}^{\infty}\psi_i(x)<+\infty,$$

我们可以令

$$g_i(x)=\frac{\psi_i(x)}{\sum_{i=1}^{\infty}\psi_i(x)}\begin{cases} >0, & x\in V_i, \\ =0, & x\overline{\in} V_i, \end{cases}$$

则

$$\sum_{i=1}^{\infty} g_i(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\psi_i(x)}{\sum_{j=1}^{\infty} \psi_j(x)} = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \psi_i(x)}{\sum_{j=1}^{\infty} \psi_j(x)} = 1.$$

再从(1)还可以看出$\sum_{j=1}^{\infty} \psi_j(x)$是$C^r$的，所以$g_i(x)$也是$C^r$的。

此外，

$$\mathrm{Supp}\,g_i = \mathrm{Supp}\,\psi_i = \overline{V}_i (\subset U_i)$$

是紧致的，且由于$\{U_i\}$是局部有限的，所以$\{\mathrm{Supp}\,g_i = \overline{V}_i\}$也是局部有限的。这就证明了$\{g_i\}$是一个 I 的分解(参看图 41)。#

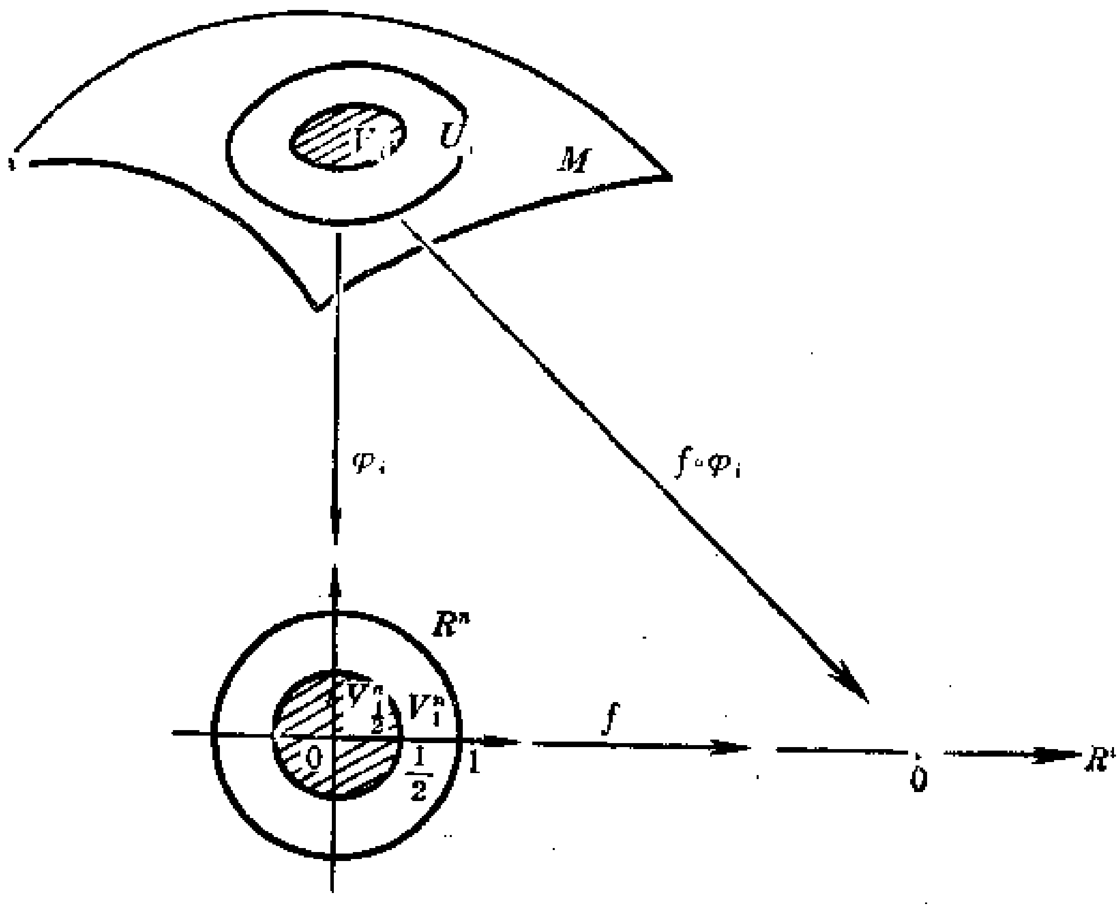


图 41

类似于定义 4 和定义 5，更进一步我们有

定义 4′ 所谓 $C^r(r\geqslant 1)$流形$(M,\mathscr{D})$上的一个**广义 1 的分解**是一族 C^r 函数

$$\{g_\alpha\geqslant 0\mid\alpha\in\mu\}$$

(指标集 μ 也可以是不可数集)使得：

(1°) $\{\mathrm{Supp}g_\alpha\}$是局部有限的，其中 $\mathrm{Supp}g_\alpha=\overline{\{x\in M\mid g_\alpha(x)\neq 0\}}$ 为 g_α的支柱.

(2°) $\mathrm{Supp}\ g_\alpha$ 是紧致的.

(3°) $\sum\limits_\alpha g_\alpha(x)=1$, $x\in M$.

由(1°)，显然对每个 $p\in M$，有一个 p 的邻域 W_p，使得 (3°) 中的和在 W_p中只有有限项 $g_\alpha(x)\neq 0$.

定义 5′ 设$(M,\mathscr{D})$是 n 维$C^r(r\geqslant 1)$流形，$\{W_\alpha|\alpha\in\mu\}$是$M$的一个局部有限的开覆盖，$\{g_\alpha|\alpha\in\mu\}$是$(M,\mathscr{D})$的一个广义 1 的分解，并且 $\mathrm{Supp}\ g_\alpha\subset W_\alpha$，则称$\{g_\alpha|\alpha\in\mu\}$ 为**附属于$\{W_\alpha|\alpha\in\mu\}$的一个广义 1 的分解.**

引理 2 设$(M,\mathscr{D})$是 n 维 $C^r(r\geqslant 1)$仿紧流形，$\{W_\alpha\}$ 是 M 的一个局部有限的开覆盖，且$\overline{W}_\alpha$是紧致的. 则存在一个附属于$\{W_\alpha\}$的广义 1 的分解$\{g_\alpha\}$.

证明 对每点 $x\in M$，存在 x 的一个坐标邻域 U_x，使得 $\overline{U}_x\subset W_{\alpha_0}$(某个 α_0). 因为M仿紧，所以必有$\{U_x|x\in M\}$ 的一个局部有限的开精致$\{U'_\beta\}$. 对任何 α，令

$$V'_\alpha=\bigcup_{\overline{U'_\beta}\subset W_\alpha}U'_\beta\ (\text{如果不存在 }\overline{U'_\beta}\subset W_\alpha,\text{则 }V'_\alpha=\phi).$$

因为$\{U'_\beta\}$是局部有限的，我们有$\overline{V'_\alpha}=\bigcup\limits_{\overline{U'_\beta}\subset W_\alpha}\overline{U'_\beta}\subset W_\alpha\subset\overline{W}_\alpha$. 显然，$\{V'_\alpha\}$ 也是M的一个局部有限的开覆盖，且$\overline{V'_\alpha}$ 是紧致的. 同理可得到M的局部有限的开覆盖$\{V_\alpha\}$，这里$\overline{V}_\alpha$是紧致的，并且

$$V_\alpha \subset \overline{V}_\alpha \subset V'_\alpha \subset \overline{V'_\alpha} \subset W_\alpha \subset \overline{W}_\alpha.$$

利用习题7(留给读者证明)对每个α,存在M上的C^r函数$\psi_\alpha \geqslant 0$,且在紧致集合$\overline{V}_\alpha$上$\psi_\alpha > 0$和在V'_α外$\psi_\alpha = 0$。因为$\overline{V}_\alpha \subset \mathrm{Supp}\psi_\alpha \subset \overline{V'_\alpha} \subset W_\alpha$和$\{W_\alpha\}$是局部有限的,所以

$$\sum_\alpha \psi_\alpha(x)$$

是M上的C^r函数。再从$\{V_\alpha\}$是M的一个开覆盖推出$\sum\limits_\alpha \psi_\alpha(x) > 0$.我们令

$$g_\alpha(x) = \frac{\psi_\alpha(x)}{\sum\limits_\beta \psi_\beta(x)},$$

则$\{g_\alpha\}$就是附属于$\{W_\alpha\}$的广义1的分解。 #

定理 4 设$(M, \mathscr{D})$是n维$C^r(r \geqslant 1)$仿紧流形,则存在M的一个局部有限的坐标邻域的开覆盖$\{W_\alpha\}$,且$\overline{W}_\alpha$是紧致的。因而存在一个附属于$\{W_\alpha\}$的广义1的分解$\{g_\alpha\}$。

证明 对每点$x \in M$,则存在x的一个坐标邻域U_x,使得$\overline{U}_x$是紧致的。因为M仿紧,所以必有$\{U_x | x \in M\}$的一个局部有限的开精致$\{W_\alpha\}$。显然,$\overline{W}_\alpha \subset \overline{U}_x$(某个$x$),因而$\overline{W}_\alpha$是紧致的。 #

定理 5 设$(M, \mathscr{D})$是紧致的n维C^r流形$(r \geqslant 1)$,则存在$m(\geqslant 1)$以及一个C^r嵌入

$$F: M \to R^m \times \underbrace{R^n \times \cdots \times R^n}_{m\text{个}} = R^{m(n+1)}.$$

证明 设方体

$$C^n(a) = \{x \in R^n \mid |x^j| < a, j = 1, \cdots, n\},$$

则

$$\overline{C^n(a)} = \{x \in R^n \mid |x^j| \leqslant a, j = 1, \cdots, n\}.$$

对于任何$p \in M$,选取p的局部坐标系(U_p, φ_p),使得

$$\varphi_p(p)=0,\overline{C^n(1)}\subset\varphi_p(U_p)$$

(至多再作一线性变换即可)。令

$$V_p=\varphi_p^{-1}(C^n(1)),$$

$$W_p=\varphi_p^{-1}\left(C^n\left(\frac{1}{2}\right)\right).$$

这些集合$\{W_p \mid p\in M\}$覆盖了M，由M紧致，可选出有限个$\{W_1,\cdots,W_m\}$仍覆盖M. 对应于W_i的局部坐标系为(U_i,φ_i)，$V_i=\varphi_i^{-1}(C^n(1))$.

应用习题3中的函数f，设

$$f_i(x)=\begin{cases}f(\varphi_i(x)), & x\in U_i,\\ 0, & x\in M-\overline{V}_i\ (\overline{V}_i=\overline{\varphi_i^{-1}(C^n(1))}\subset U_i),\end{cases}$$

显然f_i: $M\to R^1$是C^r的. 我们定义

$$F:\ M\to R^m\times\underbrace{R^n\times\cdots\times R^n}_{m\text{个}}=R^{m(n+1)}$$

为

$$F(x)=(f_1(x),\cdots,f_m(x);f_1(x)\cdot\varphi_1(x);\cdots;f_m(x)\cdot\varphi_m(x)),$$

由f_i的性质，$f_i(x)\cdot\varphi_i(x)$可视作M上的C^r函数，只须在U_i外边把它定义为0. 显然，F是C^r的. 下面可以证明F就是所要求的C^r嵌入.

首先证明F是一一的. 如果$F(p)=F(q)$，则对任何i，有

$$f_i(p)=f_i(q)\quad(i=1,2,\cdots,m),$$

所以若$p\in V_{i_0}$，则从

$$f_{i_0}(p)\cdot\varphi_{i_0}(p)=f_{i_0}(q)\cdot\varphi_{i_0}(q)$$

及

$$f_{i_0}(q)=f_{i_0}(p)>0$$

推出$q\in V_{i_0}$及$\varphi_{i_0}(p)=\varphi_{i_0}(q)$，再由$\varphi_{i_0}$是一一的，得到$p=q$.

又因为M是紧致的，故一一连续映射

$$F: M \to F(M) \subset R^{m(n+1)}$$

是同胚。

最后，我们证明 $\mathrm{rank} F = n$. 任何 $p \in M$，则 $p \in W_k$（由覆盖，至少属于一个）. 我们利用局部坐标系 (U_k, φ_k) 可以证明 Jacobi 矩阵

$$D(I \circ F \circ \varphi_k^{-1}) = D(F \circ \varphi_k^{-1})$$

包含非异的 $n \times n$ 矩阵，因而 $(\mathrm{rank} F)_p = n$. 事实上，设

$$\varphi_k(x) = (u^1, \cdots, u^n) = u, \varphi_k(p) = u_0.$$

因为 $f(u)$ 在 u_0 的一个邻域中恒等于 1，所以

$$f(u_0) = 1, \ \frac{\partial f}{\partial u^j}(u_0) = 0.$$

于是，

$$f_k(x) \cdot \varphi_k(x) = f(\varphi_k(x)) \cdot \varphi_k(x) = f(u) \cdot u,$$

$$\left.\frac{\partial(f(u)u^1, \cdots, f(u)u^n)}{\partial(u^1, \cdots, u^n)}\right|_p$$

$$= \det \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial u^1}u^1 + f(u) \cdot 1 & \frac{\partial f}{\partial u^2}u^1 + f(u) \cdot 0 & \cdots & \frac{\partial f}{\partial u^n} u^1 + f(u) \cdot 0 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ \frac{\partial f}{\partial u^1}u^n + f(u) \cdot 0 & \frac{\partial f}{\partial u^2}u^n + f(u) \cdot 0 & \cdots & \frac{\partial f}{\partial u^n} u^n + f(u) \cdot 1 \end{pmatrix}_p$$

$= \det I_n = 1$. #

§3 习 题

1. 证明：具有性质 A_2 的拓扑空间 (M, τ) 的任一局部有限的开覆盖至多可数。

2. 用简单方法直接证明 R^n 是 σ 紧的。

3. 证明：存在 C^∞ 函数 $f: R^n \to R^1$，使得

$$f|_{\overline{C^n\left(\frac{1}{2}\right)}}=1,\ f|_{C^n(1)}>0,\ f|_{R^n-C^n(1)}=0.$$

提示：

$$\varphi(t)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{t}}, & t>0,\\ 0, & t\leqslant 0,\end{cases}$$

$$g(t)=\frac{\varphi(t)}{\varphi(t)+\varphi(1-t)}\begin{cases}=0, & t\leqslant 0,\\ >0, & 0<t<1,\\ =1, & t\geqslant 1,\end{cases}$$

且当 $0<t<1$ 时，$g'(t)>0$.

$$h(t)=g(2t+2)\cdot g(-2t+2)\begin{cases}=0, & |t|\geqslant 1,\\ >0, & |t|<1,\\ =1, & |t|\leqslant\frac{1}{2},\end{cases}$$

$$f(x^1,\cdots,x^n)=h(x^1)\cdot h(x^2)\cdots h(x^n).$$

4．证明：存在 C^∞ 函数 f：$R^n\to R^1$，使得

$$f(x)\geqslant 0,$$

且

$$f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant\frac{3}{2},\\ 0, & |x|\geqslant 2.\end{cases}$$

提示

$$\varphi(t)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{t^2}}, & t>0,\\ 0, & t\leqslant 0,\end{cases}$$

$$g(t)=\frac{\varphi(2-t)}{\varphi(2-t)+\varphi\left(t-\frac{3}{2}\right)}$$

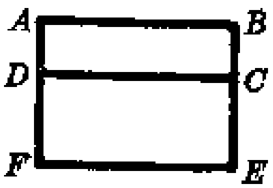


图 42

是 C^∞ 函数，且

$$g(t)|_{t\geqslant 2}=0,\quad g(t)|_{t\leqslant\frac{3}{2}}=1.$$

$$f(x)=g(|x|).$$

5. 利用题 3 或 4 证明定理 2 和定理 3。

6. 在 R^2 中构造一个 C^∞ 函数 ψ，使它在矩形 $ABCD$ 和 $FECD$（见图 42）内部为正，而在其它各点为 0。

7. 设 U 是 n 维 C^r 流形 $(M,\mathscr{D})$ 的开子集，C 是 U 中的紧致子集，证明：存在一个 M 上的 C^r 函数 ψ，使得 $\psi|_C>0$，而在包含 U 的余集的某个开集内是 0。

8. 设 $\{U_i\}$ 是正规拓扑空间 (M,τ) 的一个局部有限的开覆盖。证明：存在一个 M 的闭覆盖 $\{C_i\}$，使得

$$C_i\subset U_i\quad(i=1,2,\cdots).$$

提示：利用归纳法构造 V_i 及 $C_i=\overline{V}_i$ 如下：令开集 V_1 满足

$$M-(U_2\cup U_3\cup\cdots)\subset V_1\subset\overline{V}_1\subset U_1,\ C_1=\overline{V}_1,$$

若已构造了 $V_1,\cdots,V_{i-1}$ 使得 $\overline{V}_k\subset U_k$，且

$$V_1\cup\cdots\cup V_{k-1}\cup U_k\cup\cdots=M\quad(k=1,2,\cdots,i-1),$$

则令开集 V_i 满足

$$M-(V_1\cup\cdots\cup V_{i-1}\cup U_{i+1}\cup\cdots)\subset V_i\subset\overline{V}_i\subset U_i,C_i=\overline{V}_i.$$

9. 设 $(M,\mathscr{D})$ 是具有性质 A_2 的 n 维 $C^r(r\geqslant1)$ 流形。$A\subset M$，f：$A\to R^n$ 是局部 C^r 的（即对任何 $p\in A$，存在 M 中的开集 U_p，使得 $f|_{A\cap U_p}$ 可以延拓到 U_p 是 C^r 的）。证明：f 是 C^r 的（即存在含 A 的开集 U，使得 f 可以延拓到 U 是 C^∞ 的）。

问：f 能否延拓到 M 是 C^r 的？A 为闭集呢？

10. 设 $\{f_i|i=1,2,\cdots\}$ 和 $\{g_j|j=1,2,\cdots\}$ 分别是附属于 n 维 C^r 流形 $(M,\mathscr{D})$ 的局部有限的开覆盖 $\{U_i\}$ 和 $\{V_j\}$ 的 C^r 的 1 的分解 $(r\geqslant1)$。

证明：$\{f_i\cdot g_j|i,j=1,2,\cdots\}$ 是附属于局部有限的开覆盖 $\{U_i\cap V_j\}$ 的 C^r 的 1 的分解。

11. 设 m 维 C^r 流形 $(M_1,\mathscr{D}_1)$ 是 n 维 C^r 仿紧流形 $(M_2,\mathscr{D}_2)$ 的闭的正则子流形。证明存在 M_2 的局部有限的开覆盖 $\{U_\alpha\}$，其中 $(U_\alpha,\varphi_\alpha)$ 是局部坐标系，并且 U_α 或者与 M_1 不相交，或者 $(U_\alpha,\varphi_\alpha)$ 是 M_2 的形如第二章 2.3 定理 2 中的特殊坐标系。如果选取 $\{f_\alpha\}$ 为附属于 M_2 的 $\{U_\alpha\}$ 的广义 1 的分解，则 $\{f_\alpha|_{M_1}\}$ 是附属于 M_1 的局部有限的开覆盖 $\{U_\alpha\cap M_1\}$ 的广义 1 的分解。

如果 M_2 是 σ 紧的，则可选取 $\{f_i|i=1,2,\cdots\}$ 为附属于 M_2 的局部有限

的$\{U_i\}$的 1 的分解，而

$$\{f_i|_{M_1}|i=1,2,\cdots\}$$

是附属于 M_1的局部有限的开覆盖$\{U_i\cap M_1\}$的 1 的分解。

如果 M_1是紧致的，我们还可以使$\{f_i\}$只有有限个元素。

12. 设$\{U_\alpha\}$和$\{V_\beta\}$ 都是 n 维流形 $(M,\mathscr{D})$的局部有限的开覆盖，则$\{U_\alpha\cap V_\beta\}$也是局部有限的开覆盖。

13.* 由Whitney[1]给出了：如果$(M,\mathscr{D})$是 n 维的 C^1流形，且又是A_2空间，则存在 C^1嵌入 $F: M\to R^{2n+1}$，这里 $F(M)$是 R^{2n+1}的实解析子流形。

从这结果可以推出：任何一个 A_2的 n 维 C^1流形有一个实解析构造。

14. 设$(M_1,\mathscr{D}_1)$和$(M_2,\mathscr{D}_2)$分别是 m 维和 n 维 C^r 流形，证明：$F: M_1\to M_2$是 C^r 映射$\Longleftrightarrow$对任何 C^r 函数 $f: M_2\to R^1$(§2.2 定义 2)，$f\circ F: M_1\to R^1$ 是 C^r 函数。

15. 证明引理 1 中的 $g(x)$在 $x=0$ 不解析。

16. 定理 1(2°)的逆定理是否成立？举例说明。并对照 8.1 定理 2。

§ 4　切向量、切向量场

4.1　切向量、切空间

例 1　在 R^n 中，设 G_f 是含 p 的开集，f 在 G_f 上连续可导。方向导数

$$X_pf=\left.\frac{df(x(t))}{dt}\right|_{t=0}=\sum_{i=1}^n\frac{\partial f}{\partial x^i}(p)\cdot\frac{dx^i}{dt}(0)=\sum_{i=1}^n\frac{\partial f}{\partial x^i}(p)\cdot\alpha^i$$

$$=\left(\sum_{i=1}^n\alpha^i\frac{\partial}{\partial x^i}\right)f. \tag{1}$$

特别地，

$$X_px^j=\sum_{i=1}^n\alpha^i\frac{\partial x^j}{\partial x^i}=\sum_{i=1}^n\alpha^i\delta_i^j=\alpha^j,$$

其中 Kronecker 符号

$$\delta_j^i=\begin{cases}1, & i=j,\\ 0, & i\neq j.\end{cases}$$

容易看出，对上述所有的 f, X_pf 的值完全确定了向量 X_p（事实上，对所有的 x^i，由 $X_px^i=a^i$ 完全确定了向量 X_p）。

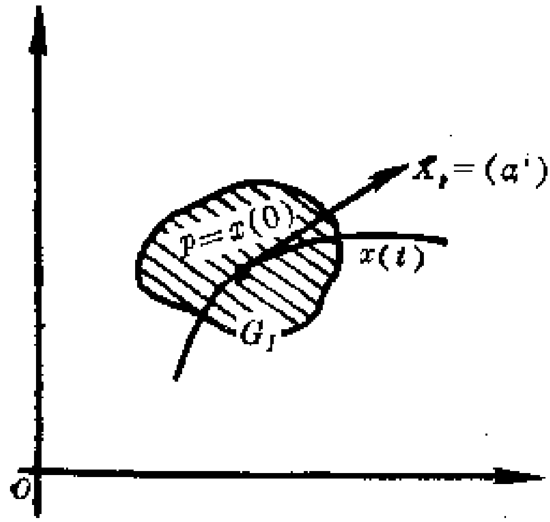


图 43

此外，如果含 p 的开集

$$G\subset G_f\cap G_g,$$

且

$$f|_G\equiv g|_G,$$

则由(1)显然有

$$X_pf=X_pg.$$

从(1)还可推出以下的简单性质：

$(1°)$ $X_p(f+g)=X_pf+X_pg$.

$(2°)$ $X_p(cf)=cX_pf\ (c\in R)$.

$(3°)$ $X_p(fg)=g(p)\cdot X_pf+f(p)\cdot X_pg$.

其中 cf 定义在 G_f 上，$f+g$ 和 fg 定义在含 p 的 $G_f\cap G_g$ 上。

1. 芽

定义 1 设$(M,\mathscr{D})$是 n 维 C^∞ 流形，

$F_p=\{(f,G_f)\mid p\in G_f\subset M,\ G_f$ 是 M 的开集，$f:G_f\to R$ 是C^∞的$\}$。

如果存在含 p 的开集

$$G\subset G_{f_1}\cap G_{f_2},$$

使得

$$f_1|_G\equiv f_2|_G,$$

则称

$$(f_1,G_{f_1})\sim(f_2,G_{f_2}).$$

容易看出~确是一个等价关系。等价类

$$\{f\}=\{(f_1,G_{f_1})|(f_1,G_{f_1})\sim(f,G_f)\}$$

称为 C^∞ 函数 f 在 p 点的芽。记 $F_p/\sim$ 为 p 点处芽的全体。

于是定义运算：

$$\{f\}+\{g\}=\{f+g\},$$

$$c\cdot\{f\}=\{cf\},$$

$$\{f\}\cdot\{g\}=\{f\cdot g\}.$$

显然，在第一和第二两种运算下 $F_p/\sim$ 形成一个向量空间；在第一和第三两种运算下 $F_p/\sim$ 形成一个环；因此，在三种运算下，$F_p/\sim$ 形成一个代数（注意：由于定义域 G_f 随 f 而变，故 F_p 在运算 $f+g$，cf，$f\cdot g$ 下不形成代数）。

2.（逆变）切向量

定义 2 如果映射

$$X_p: F_p/\sim\longrightarrow R$$

$$\{f\}\longrightarrow X_p\{f\}$$

满足条件：

(1°) $X_p(\{f\}+\{g\})=X_p\{f\}+X_p\{g\}$，

(2°) $X_p(c\cdot\{f\})=c\cdot X_p\{f\}$。 }（线性性）

(3°) $X_p(\{f\}\cdot\{g\})=\{g\}_p\cdot X_p\{f\}+\{f\}_p\cdot X_p\{g\}$

$=g(p)\cdot X_p\{f\}+f(p)\cdot X_p\{g\}$（导性）。

则称 X_p 为 p 点处的一个切向量。

定义 2′ 如果映射

$$X_p: F_p\longrightarrow R$$

$$f\longrightarrow X_pf$$

满足条件：若 $(f,G_f)\sim(f_1,G_{f_1})$，则 $X_pf=X_pf_1$，且有

(1°) $X_p(f+g)=X_pf+X_pg$，

(2°) $X_p(cf)=c\cdot X_pf$。 }（线性性）

(3°) $X_p(f\cdot g)=g(p)\cdot X_pf+f(p)\cdot X_pg$（导性）。

(这里 $G_{cf}=G_f, G_{f+g}=G_f\cap G_g, G_{f\cdot g}=G_f\cap G_g$.) 则称 X_p 为 p 点处的一个**切向量**。

不难验证定义 2 和定义 2′是等价的(本质上并无区别)。

3．切空间 $T_p(M)$

定义 3 设 $T_p(M)=\{X_p|X_p$ 为 p 点处的切向量$\}$(有时,为方便起见,省去 p,记 X_p 为 X)。如果 $X, X_1, X_2\in T_p(M), c\in R$,我们定义运算

$$(X_1+X_2)\{f\}=X_1\{f\}+X_2\{f\},$$

$$(cX)\{f\}=c\cdot X\{f\}.$$

容易验证 X_1+X_2, cX 满足定义 2 中的条件 (1°),(2°),(3°),故

$$X_1+X_2, cX\in T_p(M),$$

并且满足向量空间的各个条件,于是 $T_p(M)$ 形成一个向量空间,称它为**切空间**。

定理 1 $T_p(M)$是 n 维向量空间。

证明 首先找出 n 个线性无关的特殊切向量。

设局部坐标系为(U,φ), $\{x^i|i=1,2,\cdots,n\}$。我们定义坐标向量

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_p,\cdots,\left(\frac{\partial}{\partial x^n}\right)_p.$$

为简单起见,省去 p,记为

$$\frac{\partial}{\partial x^1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^n}.$$

令映射

$$\frac{\partial}{\partial x^i}: F_p\to R,$$

$$\frac{\partial}{\partial x^i}f=\frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial x^i}(\varphi(p)). \tag{2}$$

显然,若

$$(f,G_f)\sim(f_1,G_{f_1}),$$

则

$$\frac{\partial}{\partial x^i} f=\frac{\partial}{\partial x^i} f_1,$$

且满足：

$$(1°)\quad \frac{\partial}{\partial x^i}(f+g)=\frac{\partial (f+g)\circ\varphi^{-1}}{\partial x^i}(\varphi(p))$$

$$=\frac{\partial (f\circ\varphi^{-1})}{\partial x^i}(\varphi(p))+\frac{\partial (g\circ\varphi^{-1})}{\partial x^i}(\varphi(p))$$

$$=\frac{\partial}{\partial x^i} f+\frac{\partial}{\partial x^i} g.$$

$$(2°)\quad \frac{\partial}{\partial x^i}(cf)=\frac{\partial (cf)\circ\varphi^{-1}}{\partial x^i}(\varphi(p))$$

$$=c\frac{\partial (f\circ\varphi^{-1})}{\partial x^i}(\varphi(p))=c\frac{\partial}{\partial x^i} f.$$

$$(3°)\quad \frac{\partial}{\partial x^i}(fg)=\frac{\partial (fg)\circ\varphi^{-1}}{\partial x^i}(\varphi(p))$$

$$=g\circ\varphi^{-1}(\varphi(p))\cdot\frac{\partial (f\circ\varphi^{-1})}{\partial x^i}(\varphi(p))$$

$$+f\circ\varphi^{-1}(\varphi(p))\cdot\frac{\partial (g\circ\varphi^{-1})}{\partial x^i}(\varphi(p))$$

$$=g(p)\cdot\frac{\partial}{\partial x^i} f+f(p)\cdot\frac{\partial}{\partial x^i} g.$$

由定义 2′，$\frac{\partial}{\partial x^i}\in T_p(M)$.

此外，如果$\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda^i\frac{\partial}{\partial x^i}=0$ (0 是零向量，即 $0f=0$)，则特别取

$f=x^j$ 有

$$0=0x^j=\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda^i\frac{\partial}{\partial x^i}\right)x^j=\sum_{i=1}^{n}\lambda^i\left(\frac{\partial}{\partial x^i}x^j\right)=\sum_{i=1}^{n}\lambda^i\frac{\partial x^j}{\partial x^i}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \lambda^i \delta_i^j = \lambda^j \qquad (j=1,\cdots,n).$$

所以$\left\{\frac{\partial}{\partial x^1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^n}\right\}$是线性无关的。

最后，证明任何 $X_p \in T_p(M)$，有 $X_p = \sum_{i=1}^{n} (X_p x^i)\cdot\frac{\partial}{\partial x^i}$，于是

$$\left\{\frac{\partial}{\partial x^1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^n}\right\}$$

是 $T_p(M)$的基。为此，对任何 $f\in F_p$，在含 p 的局部坐标系 (U,φ)，$\{x^i\}$中，我们把

$$f\circ\varphi^{-1}(x^1,\cdots,x^n)\text{简记为 } f(x^1,\cdots,x^n),$$

而 p 点的坐标为$(a^1,\cdots,a^n)$。于是

$$f(x^1,\cdots,x^n)=f(a^1,\cdots,a^n) + \int_0^1 \frac{df(a^1+t(x^1-a^1),\cdots,a^n+t(x^n-a^n))}{dt}dt$$

$$=f(a^1,\cdots,a^n)$$

$$+\int_0^1 \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}(a^1+t(x^1-a^1),\cdots,a^n+t(x^n-a^n))\cdot(x^i-a^i)dt$$

$$=f(a^1,\cdots,a^n)+\sum_{i=1}^{n}(x^i-a^i)f_i(x^1,\cdots,x^n),$$

其中

$$f_i(x^1,\cdots,x^n)=\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^i}(a^1+t(x^1-a^1),\cdots,a^n+t(x^n-a^n))dt.$$

$$f_i(a^1,\cdots,a^n)=\frac{\partial f}{\partial x^i}(a^1,\cdots,a^n).$$

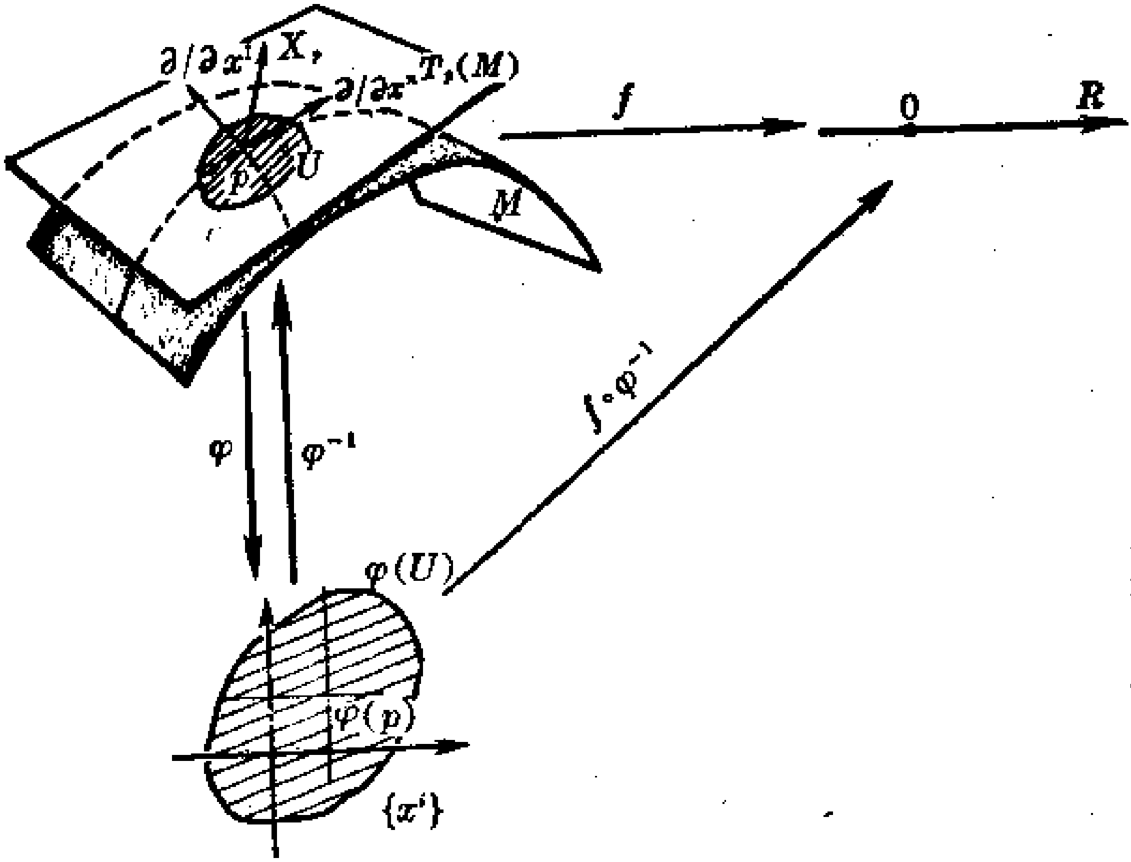


图 44

所以，由定义 2′ 中的(1°)(2°)(3°)有

$$X_p f = X_p f(a^1,\cdots,a^n) + \sum_{i=1}^{n} X_p(x^i - a^i)\cdot f_i(a^1,\cdots,a^n)$$

$$+\sum_{i=1}^{n}(a^i - a^i)\cdot X_p f_i$$

$$=\sum_{i=1}^{n}(X_p x^i)\cdot\frac{\partial f}{\partial x^i}(a^1,\cdots,a^n) = \left[\sum_{i=1}^{n}(X_p x^i)\frac{\partial}{\partial x^i}\right]f.$$

其中第二个等号成立是因为

$$X_p(1) = X_p(1\cdot 1) = 1\cdot X_p(1) + 1\cdot X_p(1) = X_p(1) + X_p(1),$$

$$X_p(1) = 0,$$

$$X_p(c) = X_p(c\cdot 1) = cX_p(1) = 0 \quad (c\in R).$$

所以，

$$X_p=\sum_{i=1}^{n}(X_p x^i)\frac{\partial}{\partial x^i}.\qquad \#$$

4. 坐标基的变换

设有两个局部坐标系：

$$(U_\alpha,\varphi_\alpha),\{x^i\},$$

$$(U_\beta,\varphi_\beta),\{y^i\}.$$

于是在 $U_\alpha\cap U_\beta$ 中，坐标基之间有关系：

$$\frac{\partial}{\partial y^i}f=\frac{\partial(f\circ\varphi_\beta^{-1})}{\partial y^i}=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial(f\circ\varphi_\alpha^{-1})}{\partial x^j}\cdot\frac{\partial x^j}{\partial y^i}=\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial x^j}{\partial y^i}\frac{\partial}{\partial x^j}\right)f,$$

所以，

$$\frac{\partial}{\partial y^i}=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial x^j}{\partial y^i}\frac{\partial}{\partial x^j},$$

即

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial y^1}\\ \vdots\\ \frac{\partial}{\partial y^n}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial x^1}{\partial y^1} & \cdots & \frac{\partial x^n}{\partial y^1}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{\partial x^1}{\partial y^n} & \cdots & \frac{\partial x^n}{\partial y^n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x^1}\\ \vdots\\ \frac{\partial}{\partial x^n}\end{pmatrix}.$$

5. 切向量的坐标变换

因为

$$\sum_{j=1}^{n}\beta^j\frac{\partial}{\partial y^j}=X_p=\sum_{i=1}^{n}\alpha^i\frac{\partial}{\partial x^i}=\sum_{i=1}^{n}\alpha^i\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial y^j}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial y^j}$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial y^j}{\partial x^i}\alpha^i\right)\frac{\partial}{\partial y^j},$$

所以，

$$\beta^j=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial y^j}{\partial x^i}\alpha^i,$$

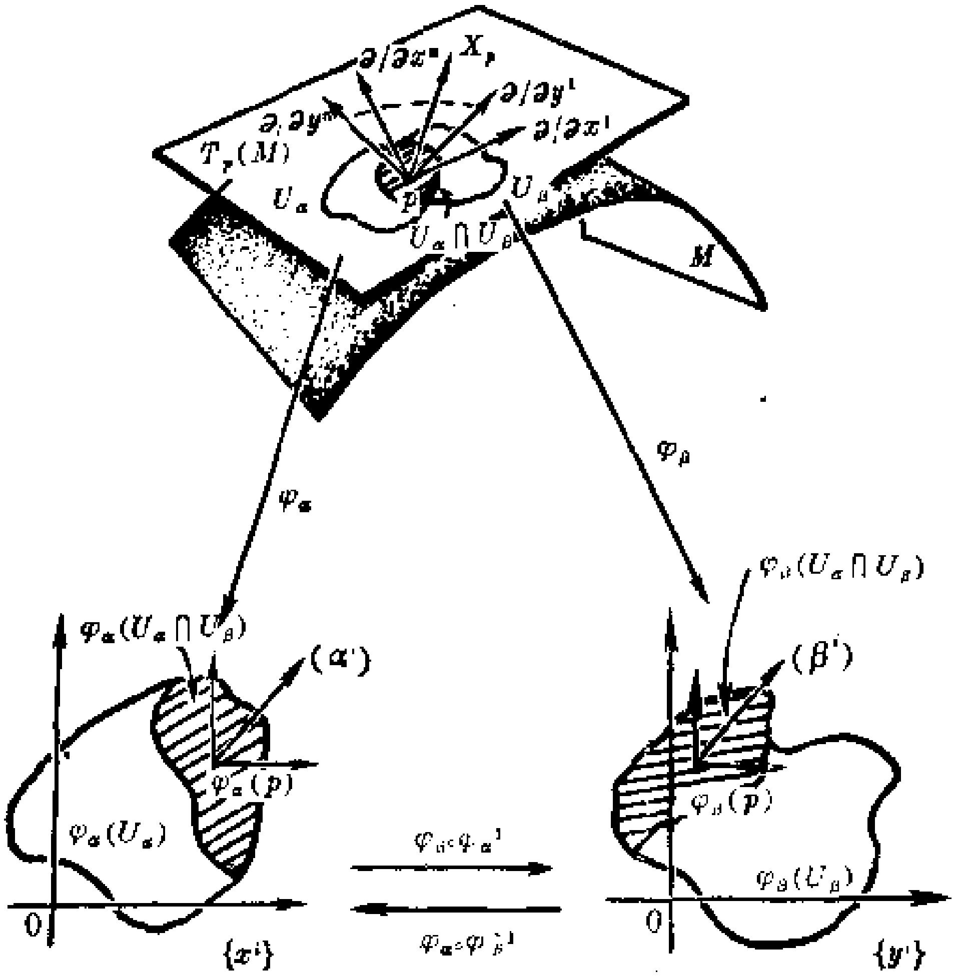


图 45

即

$$\begin{pmatrix}\beta^1\\ \vdots\\ \beta^n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial y^1}{\partial x^1}&\cdots&\dfrac{\partial y^1}{\partial x^n}\\ \cdots&\cdots&\cdots\\ \dfrac{\partial y^n}{\partial x^1}&\cdots&\dfrac{\partial y^n}{\partial x^n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha^1\\ \vdots\\ \alpha^n\end{pmatrix}\tag{3}$$

其中$\{\alpha^i\}$和$\{\beta^i\}$分别称为切向量 X_p 关于局部坐标系$\{x^i\}$和$\{y^i\}$的**支量**. 由此,可给出古典切向量的定义.

定义 2″ 设 H_p 为 p 的局部坐标系的全体,如果映射

$$X_p:\ H_p\to R^n,$$

使得对任何$\{x^i\}$,$\{y^i\}\in H_p$,有

$$X_p(\{x^i\})=(\alpha^1,\cdots,\alpha^n),X_p(\{y^i\})=(\beta^1,\cdots,\beta^n).$$

且满足关系(3)，则称 X_p 为 p 点处的一个**切向量**．换句话说，如果满足 (3)，则称 $(\alpha^i)\sim(\beta^i)$，于是定义切向量 X_p 为等价类 $[(\alpha^i)]$．

6．切向量的另一定义

定义 2''' 设 $Cu(M)=\{(p,\sigma)\mid p\in M,\sigma:(-\varepsilon,\varepsilon)\to M$ 是 C^∞ 映射，$\sigma(0)=p\}$（M 的 C^∞ 曲线的空间）．在 $Cu(M)$ 上，我们引进以下的等价关系：

$$(p,\sigma)\sim(p',\sigma')\Longleftrightarrow p=p' \text{ 和} \left.\frac{d(x^i\circ\sigma)}{dt}\right|_{t=0}=\left.\frac{d(x^i\circ\sigma')}{dt}\right|_{t=0}$$

$(i=1,2,\cdots,n)$，这里 $\{x^i\}$ 是 p 的局部坐标系．

如果 $\{y^i\}$ 是 p 的另一个局部坐标系，则

$$\frac{d(y^i\circ\sigma)}{dt}=\sum_{j=1}^n\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\cdot\frac{d(x^j\circ\sigma)}{dt}.$$

因此，上述等价关系不依赖于局部坐标系的选取．

设 $T(M)$ 为 $Cu(M)$ 的等价类 $[(p,\sigma)]$ 的全体．$X\in T(M)$，称为一个**切向量**．元素 $(p,\sigma)\in X$，称 X 是切于 (p,σ) 的．

设 π：$Cu(M)\to M$，$\pi(p,\sigma)=p$．显然，

$$(p,\sigma)\sim(p',\sigma')\Rightarrow\pi(p,\sigma)=\pi(p',\sigma')=p=p',$$

于是，它诱导一个映射（仍记为 π）$\pi:T(M)\to M$．如果 $X\in T(M)$ 和 $\pi(X)=p$，则称 X 为 p 点处的一个**切向量**，而 $T_p(M)=\pi^{-1}(p)$ 称为 p 点处的**切空间**．

设 (U,φ)，$\{x^i\}$ 是 p 点的局部坐标系，$X\in T_p(M)$，$(p,\sigma)\in X$，令

$$\bar\varphi(X)=(\alpha^1,\cdots,\alpha^n),\alpha^i=\left.\frac{d(x^i\circ\sigma)}{dt}\right|_{t=0},$$

容易看出 $\bar\varphi$ 不依赖于 σ 的选取，映射 $\bar\varphi$：$T_p(M)\to R^n$ 是一对一的．我们还可以证明

$$\bar{\varphi}(T_p(M))=R^n.$$

事实上，如果$(\alpha^1,\cdots,\alpha^n)\in R^n$，由

$$\sigma(t)=\varphi^{-1}(\varphi(p)+t(\alpha^1,\cdots,\alpha^n))$$

定义曲线$\sigma(t)$．通过一个简单的计算推出，如果X是切于(p,σ)的，则

$$\bar{\varphi}(X)=(\alpha^1,\cdots,\alpha^n).$$

如果(V,ψ)，$\{y^i\}$是p点的另一局部坐标系，$\bar{\psi}(X)=(\beta^1,\cdots,\beta^n)$，则

$$\beta^i=\left.\frac{d(y^i\circ\sigma)}{dt}\right|_{t=0}=\sum_{j=1}^n\left.\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right|_{\varphi(p)}\left.\frac{d(x^j\circ\sigma)}{dt}\right|_{t=0}=\sum_{j=1}^n\left.\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right|_{\varphi(p)}\alpha^j.$$

因此，$\bar{\psi}\circ\bar{\varphi}^{-1}: R^n\to R^n$是非异线性映射．

对于任何$\lambda,\mu\in R$，$X,Y\in T_p(M)$，我们定义

$$\lambda X+\mu Y=\bar{\varphi}^{-1}[\lambda\bar{\varphi}(X)+\mu\bar{\varphi}(Y)]$$

因为$\bar{\psi}\circ\bar{\varphi}^{-1}$是线性的，所以上式定义不依赖于$\varphi$的选取．于是，$T_p(M)$就成为一个向量空间，（参看图46），而

$$\bar{\varphi}: T_p(M)\to R^n$$

是一个同构．

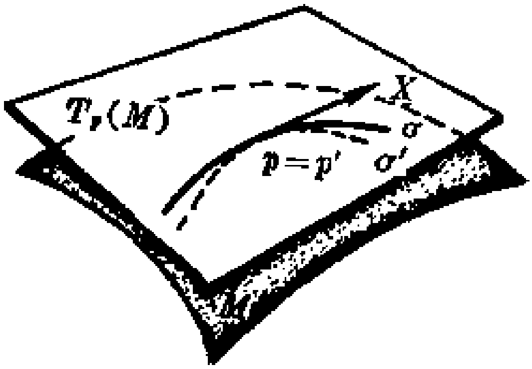


图 46

7．C^∞映射的微分F_*．

定义 4 设$(M_1,\mathscr{D}_1)$和$(M_2,\mathscr{D}_2)$分别是m维和n维C^∞流形．

$$F: M_1\to M_2$$

是C^∞映射．所谓F在p点的**微分**（或F的**Jacobi映射**）是映射

$$F_{*p}: T_p(M_1)\to T_{F(p)}(M_2),$$

使得对$F(p)$附近的任何C^∞实函数f，有

$$F_{*p}(X_p)f=X_p(f\circ F)\qquad (X_p\in T_p(M)).$$

(作为习题,读者验证 $F_{*p}(X_p)$ 确实是 $F(p)$ 点处的切向量,并且 F_{*p} 是线性映射.)特别地,有

$$F_{*p}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)f=\frac{\partial}{\partial x^i}(f\circ F)=\frac{\partial(f\circ F\circ\varphi^{-1})}{\partial x^i}$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial(f\circ\psi^{-1})}{\partial y^j}\cdot\frac{\partial y^j}{\partial x^i}=\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial y^j}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial y^j}\right)f,$$

这里 (U,φ), $\{x^i\}$ 和 (V,ψ), $\{y^j\}$ 分别是 p 和 $F(p)$ 的局部坐标系. 于是,

$$F_{*p}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial y^j}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial y^j},$$

$$\begin{pmatrix}F_{*p}\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)\\ \vdots\\ F_{*p}\left(\frac{\partial}{\partial x^m}\right)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial y^1}{\partial x^1}&\cdots&\frac{\partial y^n}{\partial x^1}\\ \cdots&\cdots&\cdots\\ \frac{\partial y^1}{\partial x^m}&\cdots&\frac{\partial y^n}{\partial x^m}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial y^1}\\ \vdots\\ \frac{\partial}{\partial y^n}\end{pmatrix}. \tag{4}$$

我们称 $\left(\frac{\partial y^j}{\partial x^i}\right)$ 为 F_{*p} 关于局部坐标系 $\{x^i\}$,$\{y^j\}$ 的 **Jacobi 矩阵**.

设

$$X_p=\sum_{i=1}^{m}\alpha^i\frac{\partial}{\partial x^i},\quad F_{*p}(X_p)=\sum_{j=1}^{n}\beta^j\frac{\partial}{\partial y^j},$$

则

$$\sum_{j=1}^{n}\beta^j\frac{\partial}{\partial y^j}=F_{*p}\left(\sum_{i=1}^{m}\alpha^i\frac{\partial}{\partial x^i}\right)=\sum_{i=1}^{m}\alpha^iF_{*p}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\alpha^i\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial y^j}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial y^j}=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m}\alpha^i\frac{\partial y^j}{\partial x^i}\right)\frac{\partial}{\partial y^j}.$$

于是,

$$\beta^j = \sum_{i=1}^{m} \alpha^i \frac{\partial y^j}{\partial x^i},$$

$$\begin{pmatrix} \beta^1 \\ \vdots \\ \beta^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial y^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial y^1}{\partial x^m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial y^n}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial y^n}{\partial x^m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha^1 \\ \vdots \\ \alpha^m \end{pmatrix}. \tag{5}$$

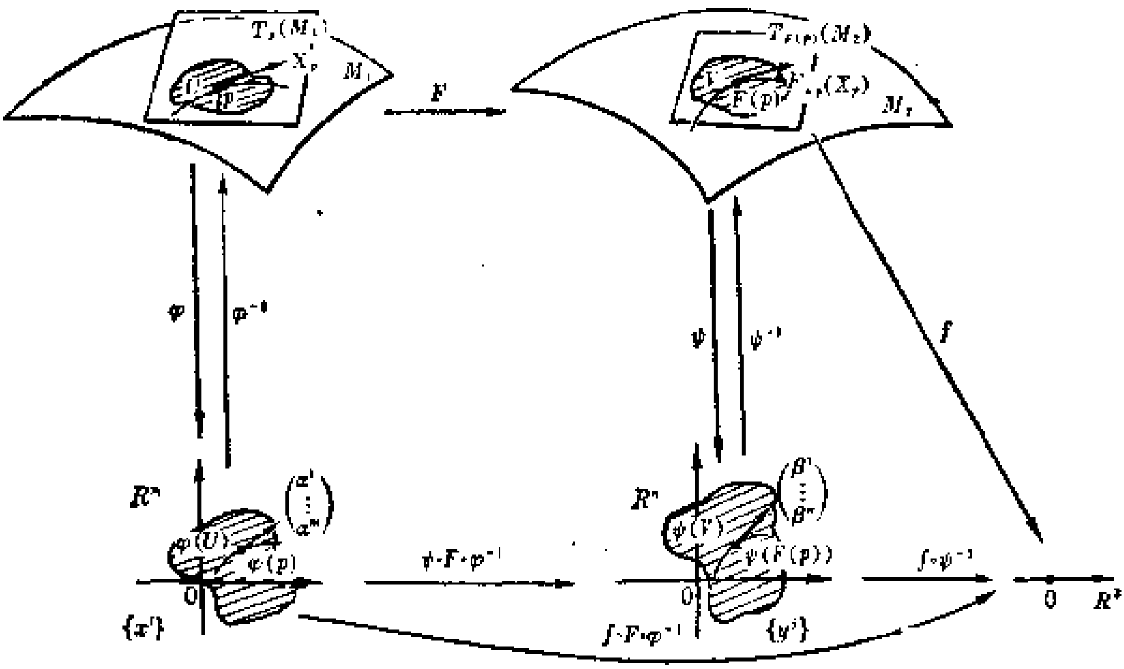


图 47

例 2 设$(M_1, \mathscr{D}_1)$和$(M_2, \mathscr{D}_2)$分别是 m 维和 n 维的 C^∞ 流形，M_1 是 M_2 的正则子流形．因此，可以选取特殊的局部坐标系(U,φ)：$\{x^i | i=1,\cdots,m\}$和$\{x^i | i=1,\cdots,n\}$分别是 M_1 和 M_2 的局部坐标，且使

$$M_1 \cap U = \{q \in U | x^j(q)=0,\ m+1 \leqslant j \leqslant n\}.$$

令 $I: M_1 \to M_2$ 是包含映射，则

$$I_{*p}: T_p(M_1) \to I_{*p}(T_p(M_1)) \subset T_{I(p)}(M_2)$$

$$\begin{pmatrix} I_{*p}\left(\frac{\partial}{\partial x^1}^*\right) \\ \vdots \\ I_{*p}\left(\frac{\partial}{\partial x^m}^*\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x^1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x^n} \end{pmatrix},$$

所以，

$$I_{*p}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}^*\right) = \frac{\partial}{\partial x^i} \quad (i=1,\cdots,m).$$

由此，我们可以将 M_1 上 p 点处的切向量

$$X_p^* = \sum_{i=1}^{m} a^i \frac{\partial}{\partial x^i}^*$$

与 M_2 上相应的切向量

$$X_p = \sum_{i=1}^{m} a^i \frac{\partial}{\partial x^i} = I_{*p}(X_p^*)$$

不加区别地等同起来，而

$$I_{*p}: T_p(M_1) \to I_{*p}(T_p(M_1))$$

就是一个同构(参看图 48)。

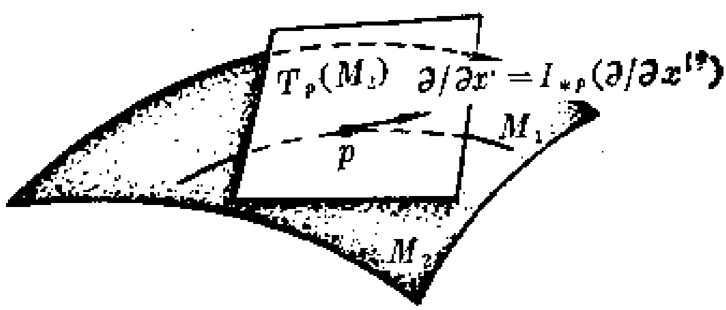


图 48

例 3　积流形的切向量空间

设 $(M_1, \mathscr{D}_1)$ 和 $(M_2, \mathscr{D}_2)$ 分别是 m 维和 n 维 C^∞ 流形，$p_1 \in M_1, p_2 \in M_2$，$\{x^1,\cdots,x^m\}$ 和 $\{y^1,\cdots,y^n\}$ 分别是 p_1 点和 p_2 点处的局部坐标系。显然，$\{x^1,\cdots,x^m,y^1,\cdots,y^n\}$ 是 $M_1 \times M_2$

在(p_1,p_2)点处的局部坐标系. 容易看出,投影映射

$$\pi_1: M_1\times M_2\to M_1,\quad \pi_1(q_1,q_2)=q_1,$$
$$\pi_2: M_1\times M_2\to M_2,\quad \pi_2(q_1,q_2)=q_2,$$

都是 C^∞ 映射. 于是,从

$$(\pi_1)_*: T_{(p_1,p_2)}(M_1\times M_2)\to T_{p_1}(M_1),$$
$$(\pi_2)_*: T_{(p_1,p_2)}(M_1\times M_2)\to T_{p_2}(M_2),$$

可以定义

$$((\pi_1)_*,(\pi_2)_*): T_{(p_1,p_2)}(M_1\times M_2)\to T_{p_1}(M_1)\times T_{p_2}(M_2),$$
$$((\pi_1)_*,(\pi_2)_*)X=((\pi_1)_*X,(\pi_2)_*X).$$

下面证明$((\pi_1)_*,(\pi_2)_*)$是一个同构. 设

$$X_1\in T_{p_1}(M_1),X_2\in T_{p_2}(M_2),X\in T_{(p_1,p_2)}(M_1\times M_2),$$

它们关于局部坐标系$\{x^1,\cdots,x^m\}$, $\{y^1,\cdots,y^n\}$, $\{x^1,\cdots,x^m,y^1,\cdots,y^n\}$的支量分别为$(\alpha^1,\cdots,\alpha^m)$, $(\beta^1,\cdots,\beta^n)$, $(\alpha^1,\cdots,\alpha^m,\beta^1,\cdots,\beta^n)$,则有

$$(\pi_1)_*X=X_1,\quad (\pi_2)_*X=X_2,$$

所以,

$$((\pi_1)_*,(\pi_2)_*)X=((\pi_1)_*X,(\pi_2)_*X)=(X_1,X_2).$$

从上式立即可看出, $((\pi_1)_*, (\pi_2)_*)$ 是一个同构. 今后,在同构$((\pi_1)_*,(\pi_2)_*)$下,将

$$T_{(p_1,p_2)}(M_1\times M_2)\text{和 } T_{p_1}(M_1)\times T_{p_2}(M_2)$$

视作是一样的.

4.1 习 题

1. 证明 $T_p(M)=\{X|X$ 为 p 点处的切向量$\}$是一个向量空间(由定理 1,它是 n 维的).

2. 说明当$(M,\mathscr{D})$是 n 维 C^∞流形时,关于切向量的定义 2、定义 2′、定义 2″和定义 2‴实质上是一致的.

定义 2″ 和定义 2‴当 $(M, \mathscr{D})$ 是 n 维 $C^r(r\geqslant1)$ 流形时,是否仍可以来

用？

对于定义 2 和 2′ 回答上述问题，并说明定理 1 是否还成立？

3. 设 $F: M_1 \to M_2$ 是 C^∞ 映射. 证明 $F_{*p}(X_p) \in T_{F(p)}(M_2)$ 和 F_{*p} 是线性映射.

4. 如果 F 是常值映射，则 $F_{*p}=0$（即对任何 $X_p \in T_p(M_1)$，有 $F_{*p}(X_p)=0$），$p \in M_1$. 此外，如果 M_1 是连通的，则其逆也成立. 如果 M_1 不连通，结论如何？

5. 设 $F: M_1 \to M_2$ 是 C^∞ 映射，按照定义 2″，如果 C^∞ 曲线 $(p,\sigma)\sim(p',\sigma')$，则

$$(F(p), F\circ\sigma) \sim (F(p'), F\circ\sigma').$$

因此，诱导出一个切空间之间的映射

$$F_{*p}: T_p(M_1) \to T_{F(p)}(M_2),$$

$$X_p = [(p,\sigma)] \to F_{*p}(X_p) = [(F(p); F\circ\sigma)].$$

6. 设 $F: M_1 \to M_2$，$G: M_2 \to M_3$ 都是 C^∞ 映射，用两种方法证明

$$(G\circ F)_{*p} = G_{*F(p)} \circ F_{*p}.$$

7. 例 2 中，如果 M_1 是 M_2 的子流形，结论如何？

8. 如果定义 2′ 中去掉"若 $(f,G_f)\sim(f_1,G_{f_1})$，则 $X_pf=X_pf_1$"，是否还与原来的定义等价？

4.2 C^∞ 向量场和积分曲线

1. C^∞ 向量场和积分曲线

定义 1 设 $(M,\mathscr{D})$ 是 n 维 C^∞ 流形，$A \subset M$. 所谓在集合 A 上的一个（逆变）向量场 X 是一个映射，它对每一点 $p \in A$，对应着唯一的一个 $X_p \in T_p(M)$. A 称为这个向量场的定义域.

以下我们总假定 A 是 M 的开集（特殊情形 $A=M$ 见图 49）. 如果对于每个点 $p \in A$，都有一个 p 的局部坐标系 (U,φ)，$\{x^i\}$ $(U \subset A)$，使得 $X=\sum_{i=1}^{n} \alpha^i \dfrac{\partial}{\partial x^i}$ 中，α^i 是 U 上的 C^r 函数，则称 X 是 C^r 向量场. 特别当 $r=0$ 时，它是连续向量场，当 $r=\infty$ 时，它

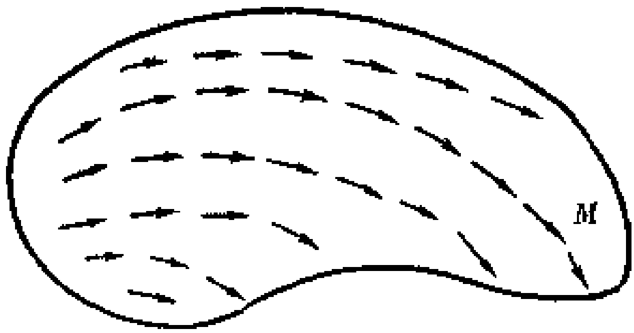


图 49

是 C^∞ 向量场，由 §4.1 中(3)式可看出，上述定义与 p 的局部坐标系的选取无关。

定理 1 设$(M,\mathscr{D})$是 n 维 C^∞ 流形。则 M 上的向量场 X 是 C^∞ 的$\Longleftrightarrow$对 M 上的任何 C^∞ 函数 f，Xf（$(Xf)_p=X_pf$）是 M 上的 C^∞ 函数。

证明 ($\Rightarrow$) 对任何 $p\in M$，在 p 的局部坐标系(U,φ)，$\{x^i\}$ 中，

$$Xf=\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha^i\frac{\partial}{\partial x^i}\right)f=\sum_{i=1}^{n}\alpha^i\frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial x^i}$$

是 C^∞ 的。

($\Leftarrow$) 对任何 $p\in M$，在 p 的局部坐标系(U,φ)，$\{x^i\}$中，由 §4.1 定理 1 的证明，

$$X=\sum_{i=1}^{n}(Xx^i)\frac{\partial}{\partial x^i}.$$

只须证明 $\alpha^i=Xx^i$ 是 C^∞ 的。为此，利用 §3 习题 3 构造一个 M 上的 C^∞ 函数 f_i，使得

$$f_i|_V=x^i|_V$$

($V\subset U$ 是 p 的一个邻域)。于是，

$$(Xx^i)|_V=(Xf_i)|_V$$

是 C^∞ 的.　　#

定义 2　设$(M,\mathscr{D})$是 n 维 C^∞ 流形，如果 $W\subset R^1$ 是开集，则称 C^r 映射(不是映射的象集)

$$\sigma: W\to M$$

为M中的一条 C^r 曲线. 通常，我们说

$$\sigma:[a,b]\to M$$

是一条 C^r 曲线，指的是 σ 可以延拓到含$[a,b]$的开集W，使得

$$\sigma: W\to M$$

是 C^r 的.

设σ是M中的一条 C^∞的曲线，(U,φ)，$\{x^1,\ \cdots,\ x^n\}$是含$\sigma(t)$(t 称为曲线 σ 的参数)的局部坐标系. 则对每个 t，确定了一个沿 σ 的切向量(参看图 50)

$$T_\sigma(t)=\sigma_*\left(\frac{d}{dt}\right)=\sum_{i=1}^{n}\frac{d(x^i\circ\sigma)}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{\sigma(t)}.$$

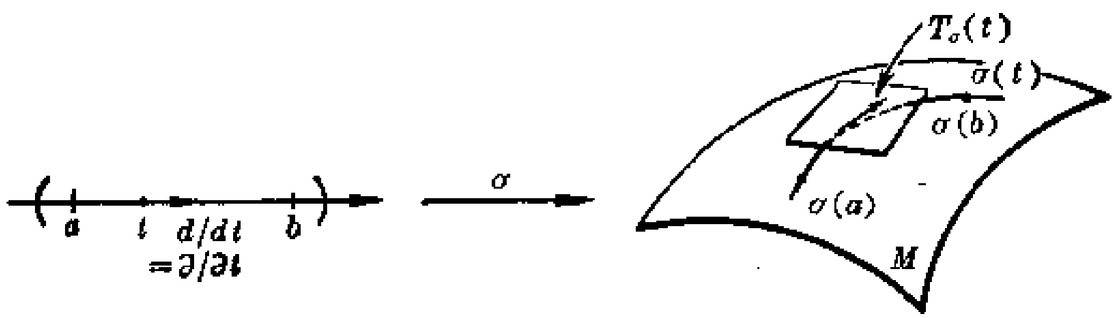


图 50

有时简记为

$$x'(\sigma)=(x^{1\prime}(\sigma),\cdots,x^{n\prime}(\sigma)).$$

特别当 $M=R^3$ 时，$T_\sigma(t)$就是一条参数曲线的"速度"向量.

例 1　在定义 2 中，

$$T_\sigma(t)\cdot f=\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{d(x^i\circ\sigma)}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{\sigma(t)}\right)f$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial x^i}\cdot\frac{d(x^i\circ\sigma)}{dt}=\frac{df(\sigma(t))}{dt}.$$

例 2 设(U,φ)，$\{x^i\}$是 n 维 C^∞流形$(M,\mathscr{D})$ 的局部坐标系．则坐标曲线

σ_i(即 $\varphi\circ\sigma_i(x^i)=(x_0^1,\cdots,x_0^{i-1},x^i,x_0^{i+1},\cdots,x_0^n)$，$x^i$是参数)

的切向量场为$\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{\sigma_i(x^i)}$，称为第 i 个坐标向量场(参看图51)．

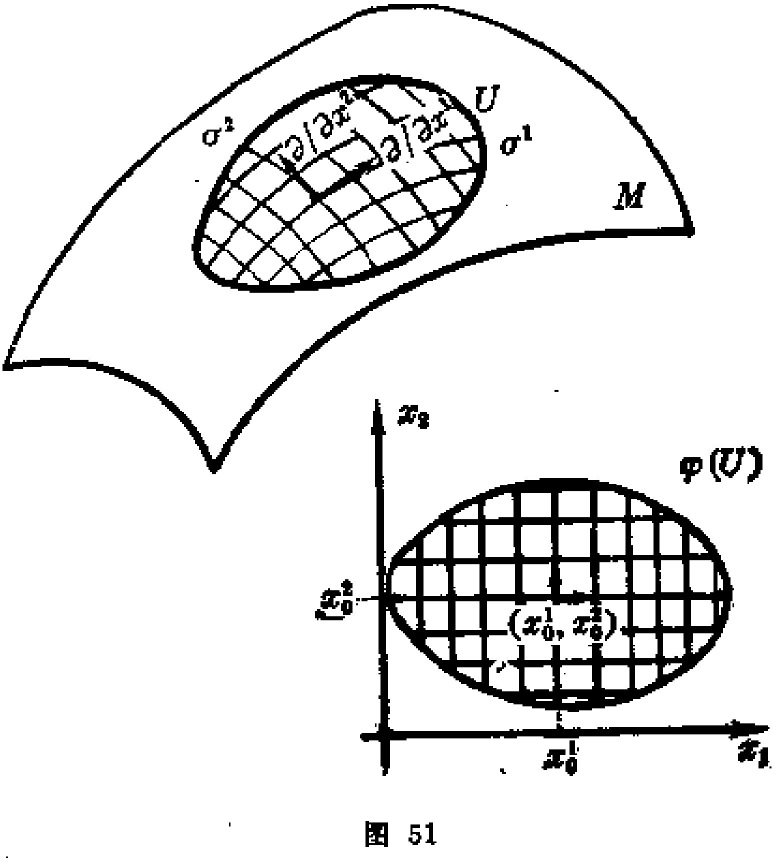


图 51

例 3 有了 C^∞ 曲线和切向量的概念后，我们可以给出 C^∞ 映射 F: $M_1\to M_2$ 的微分 F_* 的几何解释．

设 σ 是 M_1 上的一条 C^∞ 曲线，则 $F\circ\sigma$ 是 M_2 上的一条 C^∞ 曲线，并且

$$T_{F\cdot\sigma}(t)=(F\circ\sigma)_*\left(\frac{d}{dt}\right)=F_*\circ\sigma_*\left(\frac{d}{dt}\right)=F_*(T_\sigma(t)).$$

参看图 52。

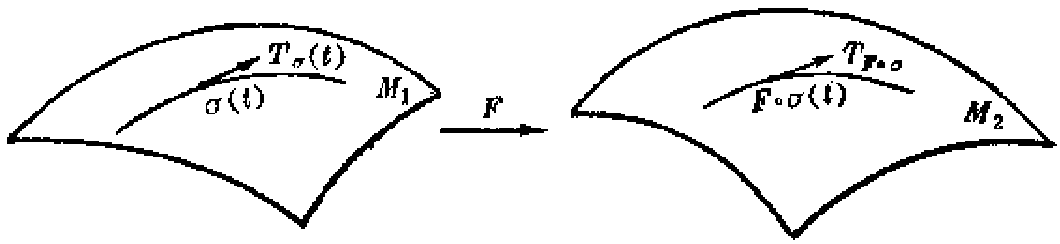


图 52

特别当 M_1 是 M_2 的 C^∞ 子流形、σ 是 M_1 上的 C^∞ 曲线时，则 $I\circ\sigma$ 是 M_2 上的 C^∞ 曲线（I 是包含映射）。于是

$$T_{I\circ\sigma}(t)=I_*(T_\sigma(t)).$$

例 4 在 R^n 中，由方程

$$F(x^1,\cdots,x^n)=0\left(\text{rank}\left(\frac{\partial F}{\partial x^1},\cdots,\frac{\partial F}{\partial x^n}\right)=1,\ F\text{ 是 }C^\infty\text{的}\right)$$确定了一个 $n-1$ 维 C^∞ 正则子流形 M。

设 σ 是 M 上的 C^∞ 曲线，则

$$T_{I\circ\sigma}(t)=\sum_{i=1}^{n}\frac{d(x^i\circ I\circ\sigma)}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{I\circ\sigma(t)}.$$

将
$$F(x^1(I\circ\sigma(t)),\cdots,x^n(I\circ\sigma(t)))=0$$
的两边对 t 求导得到

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial x^i}\cdot\frac{d(x^i\circ I\circ\sigma)}{dt}=0.$$

上式几何上表示 M 的切向量与法向量正交（参看图 53）。

定义 3 设 X 是 n 维 C^∞ 流形 $(M,\mathscr{D})$ 的某个开集上的 C^∞ 向量场，如果 C^∞ 曲线 σ 的象在 X 的定义域中，并且 $T_\sigma(t)=X_{\sigma(t)}$，则称 σ 为 X 的**积分曲线**或**流线**参看图 54。

定理 2（积分曲线的局部存在性定理） 设 X 是 n 维 C^∞ 流形 $(M,\mathscr{D})$ 的某开集上的 C^∞ 向量场，p 是 X 的定义域中的任一点，

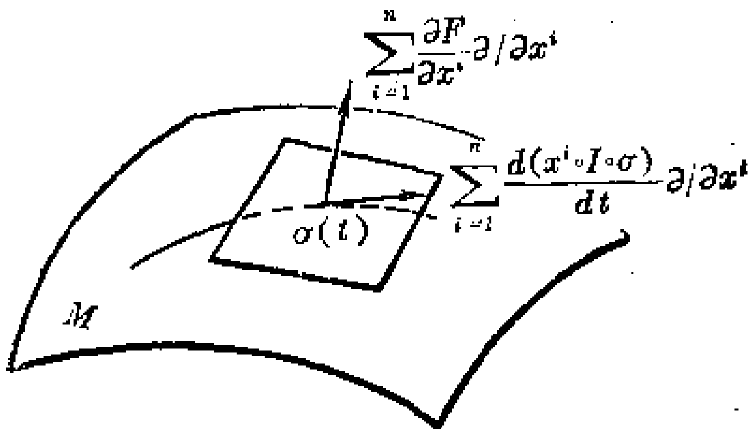


图 53

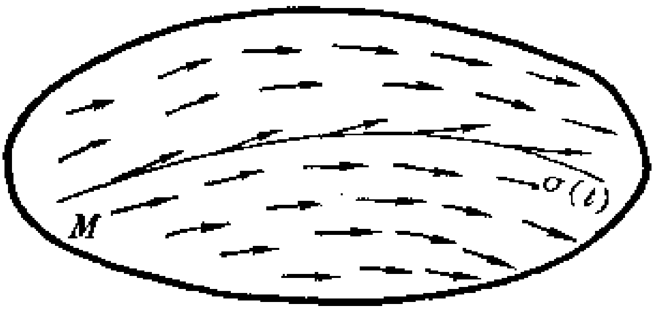


图 54

则对任何实数 b，存在 $r>0$ 和唯一的 C^∞ 曲线 $\sigma:(b-r,b+r)\to M$，使得 $\sigma(b)=p$ 和 σ 是 X 的积分曲线。

证明 设 (U,φ)，$\{x^i\}$ 是 p 的局部坐标系，U 包含在 X 的定义域中。令

$$X=\sum_{i=1}^{n}\alpha^i\frac{\partial}{\partial x^i},$$

α^i 在 U 上是 C^∞ 函数。

σ 是 X 的积分曲线 $\Longleftrightarrow\dfrac{d(x^i\circ\sigma)}{dt}=\alpha^i\circ\sigma\ (i=1,\cdots,n)$。若记 $x^i(t)\overset{\text{def}}{=}x^i\circ\sigma(t)$，则上式可写作

$$\frac{dx^i}{dt}=\alpha^i(x^1,\cdots,x^n)\qquad(i=1,\cdots,n).$$

应用微分方程的存在和唯一性定理得到 $r>0$ 和 $x^i(t)$，使所确定

的 C^∞ 曲线 σ 在指定的范围内满足所要求的性质。#

从微分方程定理可以进一步知道，它的解 C^∞ 依赖于初始值 b 和点 p。

下面我们指出，一个向量场可以认作为"无穷小变换"。

定义 4 一族 C^∞ 微分同胚 h_t: $M\to M$ 称为 M 的 C^∞ 变换的 **1 参数群**，如果映射

$$h:\ R^1\times M\to M,\ h(t,p)=h_t(p).$$

满足：

(1°) h 是 C^∞ 的。

(2°) $h_{t+s}=h_t\circ h_s$，对所有的 $t,s\in R^1$。

(3°) h_0 是恒等映射(于是 $h_t^{-1}=h_{-t}$)。

1 参数群 h_t 在 M 上诱导一个向量场. 事实上，在每个点 $p\in M$，$t\to h_t(p)$是一条通过 p 的 C^∞ 曲线，称为 p 的**轨道**. 我们定义 X_p 为这曲线在 p 点处的切向量，即

$$X_p=\sum_{i=1}^{n}\frac{dx^i(h_t(p))}{dt}\bigg|_{t=0}\cdot\frac{\partial}{\partial x^i}.$$

因为 h 是 C^∞ 的，所以映射 $p\to X_p$ 定义了 M 上的一个 C^∞ 向量场 X，它称为 1 参数群 h_t 的**无穷小生成元**.

此外，M 上的每个 C^∞ 向量场不一定产生 M 上的 C^∞ 变换的 1 参数群. 但是，局部地它是正确的.

定义 5 一族 C^∞ 局部变换 h_t: $V\to M$ (V 是 M 的开集) 称为**局部 1 参数群**，如果映射

$$h:\ (-\varepsilon,\varepsilon)\times V\to M,\ h(t,p)=h_t(p).$$

满足：

(1°) h 是 C^∞ 的。

(2°) h_t: $V\to h_t(V)$是 C^∞ 微分同胚，$t\in(-\varepsilon,\varepsilon)$。

h_0: $V\to h_0(V)=V$ 是恒等映射。

(3°) 如果 $t,s,t+s\in(-\varepsilon,\varepsilon)$，$p,h_s(p)\in V$，则

$$h_{t+s}(p)=h_t\circ h_s(p).$$

定理 3 设 X 是 n 维 C^∞ 流形 $(M,\mathscr{D})$ 的 C^∞ 向量场，$p_0\in M$. 则存在 p_0 的一个邻域 V 和 $\varepsilon>0$，使得对 $t\in(-\varepsilon,\varepsilon)$ 有一个 C^∞ 局部变换 h_t: $V\to M$ 的局部 1 参数群，它诱导出已给的向量场 X.

证明 设 (U,φ)，$\{x^i\}$ 是 p_0 的局部坐标系，不妨设 $x^1(p_0)=\cdots=x^n(p_0)=0$. 在 U 中令

$$X=\sum_{i=1}^{n}\alpha^i(x^1,\cdots,x^n)\frac{\partial}{\partial x^i}.$$

考虑下面的常微分方程：

$$\frac{dh^i}{dt}=\alpha^i(h^1(t),\cdots,h^n(t)),i=1,\cdots,n. \tag{1}$$

这里 $h^1(t),\cdots,h^n(t)$ 是未知函数，由常微分方程的基本定理，存在唯一的 C^∞ 函数组

$$h^1(t;x),\cdots,h^n(t;x),|t|<\varepsilon_1,x=(x^1,\cdots,x^n),|x^i|<\delta_1,$$

它们对每个固定的 x 形成了微分方程的解，并且满足初始条件：

$$h^i(0;x)=x^i \tag{2}$$

令 $\quad h_t(x)=(h^1(t;x),\cdots,h^n(t;x)),$

$$|t|<\varepsilon_1,x\in V_1=\{x\mid |x^i|<\delta_1\}.$$

如果

$$|t|,|s|,|t+s|<\varepsilon_1 \text{ 和 } x,h_s(x)\in V_1,$$

则

$$g^i(t)=h^i(t+s;x)$$

是满足初始条件 $g^i(0)=h^i(s;x)$ 的微分方程的解. 由解的唯一性定理，必须

$$g^i(t)=h^i(t;h_s(x)).$$

这就证明了

$$h_{t+s}(x)=h_t(h_s(x))=h_t\circ h_s(x).$$

由(2)式，h_0 是 V_1 上的恒等变换，则存在 $\varepsilon>0$ 和 $\delta>0$，使得当 $|t|<\varepsilon$ 时，对于

$$V=\{x\,|\,|x^i|<\delta\},\text{有 } h_t(V)\subset V_1.$$

因此，

$$h_{-t}\circ h_t(x)=h_t\circ h_{-t}(x)=h_0(x)=x,\ |t|<\varepsilon,\ x\in V.$$

这就推出了当 $|t|<\varepsilon$ 时，$h_t:V\to h_t(V)$ 是 C^∞ 微分同胚，因此，h_t 是定义在 $(-\varepsilon,\varepsilon)\times V$ 上的局部变换的局部 1 参数群，从 h_t 的构造，显然它在 V 上诱导出已给的向量场 X。 #

注 在上面的证明过程中，我们还看到，如果两个定义在 $(-\varepsilon,\varepsilon)\times V$ 上的局部变换的局部 1 参数群 h_t 和 $\tilde{h}_t$ 诱导出相同的向量场，则它们在 V 上是重合的(唯一性)。

定义 6 设 X 是 n 维 C^∞ 流形 $(M,\mathscr{D})$ 的 C^∞ 向量场. 如果存在 M 的 C^∞ 变换的整体的 1 参数群 h_t，它诱导出 X，则称 X 是**完备的**.

定理 4 在紧致 C^∞ 流形 $(M,\mathscr{D})$ 上，每个 C^∞ 向量场 X 是完备的.

证明 对于每个 $p\in M$，设 $V(p)$ 是 p 的邻域和 $\varepsilon(p)>0$，使得向量场 X 在 $(-\varepsilon(p),\varepsilon(p))\times V(p)$ 上产生 C^∞ 局部变换的局部 1 参数群 h_t. 因为 M 是紧致的，开覆盖 $\{V(p)\,|\,p\in M\}$ 有有限的子覆盖 $\{V(p_i)\,|\,i=1,\cdots,k\}$. 令

$$\varepsilon=\min\{\varepsilon(p_i)\,|\,i=1,\cdots,k\}.$$

由上面的注，不难看出，可以拼成一个定义在 $(-\varepsilon,\varepsilon)\times M$ 上的 C^∞ 局部 1 参数群 h_t. 因此，可以延拓到 $R^1\times M$，使 h_t 是整体的 1 参数群(留作习题). #

2. $[X,Y]$

定义 7 设 X 和 Y 是 C^∞ 流形 $(M,\mathscr{D})$ 的开集 V 上的 C^∞ 向量场，定义 $[X,Y]$ 如下：

$$[X,Y]_pf=X_p(Yf)-Y_p(Xf)$$

($p\in V$，f 为 V 上的 C^∞ 函数)。
容易验证$[X,Y]$是 V 上的 C^∞向量场，称为 X 和 Y 的**交换子积或方括号积**或 Y 关于 X 的 **Lie 导数**。

引理 1 $[X,Y]$是 V 上的 C^∞向量场。

证明 设 f,g 是 C^∞的，$\lambda\in R^1$，则

$$
\begin{aligned}
[X,Y]_p(f+g) &= X_p(Y(f+g))-Y_p(X(f+g))\\
&=[X_p(Yf)-Y_p(Xf)]+[X_p(Yg)-Y_p(Xg)]\\
&=[X,Y]_pf+[X,Y]_pg.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[X,Y]_p(\lambda f) &= X_p(Y(\lambda f))-Y_p(X(\lambda f))\\
&=\lambda[X_p(Yf)-Y_p(Xf)]=\lambda[X,Y]_pf.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[X,Y]_p(fg) &= X_p(Y(fg))-Y_p(X(fg))\\
&=X_p[fYg+gYf]-Y_p[fXg+gXf]\\
&=f(p)X_p(Yg)+(X_pf)(Yg)_p+(X_pg)(Yf)_p\\
&\quad+g(p)X_p(Yf)-f(p)Y_p(Xg)-(Y_pf)(Xg)_p\\
&\quad-g(p)Y_p(Xf)-(Y_pg)(Xf)_p\\
&=f(p)[X_p(Yg)-Y_p(Xg)]+g(p)[X_p(Yf)-Y_p(Xf)]\\
&=f(p)[X,Y]_pg+g(p)[X,Y]_pf.
\end{aligned}
$$

这就证明了$[X,Y]_p\in T_p(M)$。从定理 1 推出 $[X,Y]f=X(Yf)-Y(Xf)$是 C^∞的，再由定理 1 推出$[X,Y]$是 C^∞的。 #

定理 5 设 V 是 C^∞ 流形$(M,\mathscr{D})$的开集，X，Y，Z 是 V 上的 C^∞ 向量场，f,g,h 是 V 上的 C^∞ 函数，$\lambda,\mu\in R$，则$[\ ,\ ]$有以下性质：($\{x^i\}$，(U,φ)为局部坐标系)

(1°) $[X,Y]=-[Y,X]$ (反称性)。
$[X,X]=0$。

(2°) $\left.\begin{array}{l}[\lambda X+\mu Y,Z]=\lambda[X,Z]+\mu[Y,Z],\\ [X,\lambda Y+\mu Z]=\lambda[X,Y]+\mu[X,Z],\end{array}\right\}$(双线性)

(3°) $[fX,gY]=f(Xg)Y-g(Yf)X+fg[X,Y]$。

(4°) $[X,[Y,Z]]+[Y,[Z,X]]+[Z,[X,Y]]=0$

(Jacobi 恒等式).

(5°) $\left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right]=0.$

(6°) 如果 $X=\sum_{i=1}^{n}\alpha^i\frac{\partial}{\partial x^i}$, $Y=\sum_{i=1}^{n}\beta^i\frac{\partial}{\partial x^i}$, 则有

$$[X,Y]=\sum_{j=1}^{n}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\alpha^i\frac{\partial\beta^j}{\partial x^i}-\beta^i\frac{\partial\alpha^j}{\partial x^i}\right)\right]\frac{\partial}{\partial x^j}.$$

证明 (1°)(2°)是显然的(留作习题).

(3°)
$$\begin{aligned}[fX,gY]h&=(fX)(gY)h-(gY)(fX)h\\&=(fX)(g\cdot Yh)-(gY)(f\cdot Xh)\\&=fg(XYh)+f(Xg)(Yh)-gf(YXh)-g(Yf)(Xh)\\&=\{f(Xg)Y-g(Yf)X+fg[X,Y]\}h.\end{aligned}$$

(4°)
$$\begin{aligned}[X,[Y,Z]]f&=X[Y,Z]f-[Y,Z]Xf\\&=X(YZf-ZYf)-(YZXf-ZYXf)\\&=(XYZ-XZY-YZX+ZYX)f,\end{aligned}$$

则由对称性得

$$\begin{aligned}\{[X,[Y,Z]]+[Y,[Z,X]]+[Z,[X,Y]]\}f&=(XYZ-XZY-YZX+ZYX)f\\&+(YZX-YXZ-ZXY+XZY)f\\&+(ZXY-ZYX-XYZ+YXZ)f=0.\end{aligned}$$

(5°)
$$\left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right]f=\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial}{\partial x^j}f\right)-\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}f\right)$$

$$=\frac{\partial^2(f\circ\varphi^{-1})}{\partial x^i\partial x^j}-\frac{\partial^2(f\circ\varphi^{-1})}{\partial x^j\partial x^i}=0.$$

(6°) $[X,Y]=\left[\sum_{i=1}^{n}\alpha^i\frac{\partial}{\partial x^i}, \sum_{i=1}^{n}\beta^i\frac{\partial}{\partial x^i}\right]$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left[\alpha^{i}\frac{\partial}{\partial x^{i}},\ \beta^{j}\frac{\partial}{\partial x^{j}}\right]$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left\{\alpha^{i}\left(\frac{\partial}{\partial x^{i}}\beta^{j}\right)\frac{\partial}{\partial x^{j}}-\beta^{j}\left(\frac{\partial}{\partial x^{j}}\alpha^{i}\right)\frac{\partial}{\partial x^{i}}\right.$$

$$\left.+\alpha^{i}\beta^{j}\left[\frac{\partial}{\partial x^{i}},\ \frac{\partial}{\partial x^{j}}\right]\right\}$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\alpha^{i}\frac{\partial\beta^{j}}{\partial x^{i}}-\beta^{i}\frac{\partial\alpha^{j}}{\partial x^{i}}\right)\right]\frac{\partial}{\partial x^{j}}.\qquad\#$$

下面我们给出$[X,Y]$的几何解释.

定理 6 设X和Y是C^{∞}流形$(M,\mathscr{D})$的C^{∞}向量场. 如果X产生局部变换h_t的局部1参数群,则

$$[X,\ Y]=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[Y-(h_t)_*Y].$$

更精确地,

$$[X,Y]_p=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[Y_p-((h_t)_*Y)_p],\ p\in M.$$

证明 设f是M上的C^{∞}函数(定义在p的某邻域内即可).令

$$f(t,p)=f(h_t(p))-f(p),$$

它是$(-\varepsilon,\varepsilon)\times M\to R^1$的$C^{\infty}$函数,且$f(0,p)=f(h_0(p))-f(p)=f(p)-f(p)=0$. 我们定义函数

$$g(t,\ p)=\int_0^1\frac{\partial f(ts,p)}{\partial \mathrm{I}}ds\quad\left(\frac{\partial f(t,p)}{\partial \mathrm{I}}=\frac{\partial f(t,p)}{\partial t}\right).$$

显然$g(t,p)$是C^{∞}的, $g(0,p)=\frac{\partial f(0,\ p)}{\partial t}$.且

$$g(t,\ p)=\int_0^1\frac{\partial f(ts,p)}{\partial \mathrm{I}}ds=\frac{1}{t}f(ts,p)\ \Big|_{s=0}^{s=1}$$

$$=\frac{1}{t}f(t,p),0<|t|<\varepsilon.$$

所以

$$f(t,p)=tg(t,p),|t|<\varepsilon.$$

$$f\circ h_t=f+tg_t \qquad (g_t(p)=g(t,p)).$$

由此得到

$$g_0(p)=\lim_{t\to 0}g_t(p)=\lim_{t\to 0}g(t,p)=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}f(t,p)$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[f(h_t(p))-f(p)]$$

$$=\left.\frac{df(h_t(p))}{dt}\right|_{t=0}=X_pf.$$

即

$$g_0=Xf.$$

则

$$((h_t)_*Y)_pf=(Y(f\circ h_t))_{h_t^{-1}(p)}$$

$$=(Y(f+tg_t))_{h_t^{-1}(p)}=(Yf)_{h_t^{-1}(p)}\quad+t\cdot(Yg_t)_{h_t^{-1}(p)}$$

和

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[Y-(h_t)_*Y]_pf=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[(Yf)_p-(Yf)_{h_t^{-1}(p)}]$$

$$-\lim_{t\to 0}(Yg_t)_{h_t^{-1}(p)}$$

$$=X_p(Yf)-Y_pg_0=X_p(Yf)$$

$$-Y_p(Xf)=[X,Y]_pf.$$

这就证明了

$$[X,Y]=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[Y_p-((h_t)_*Y)_p]. \qquad \#$$

3. m-向量场 X^m

定义 8 设$(M,\mathscr{D})$是 n 维 C^∞ 流形，如果对于任何 $p\in M$，都对应着 $T_p(M)$的一个 m 维子向量空间 $X_p^{(m)}$，构成这种对应关系的映射 $X^{(m)}$称为 M 上的 **m-向量场或 m 维分布**.

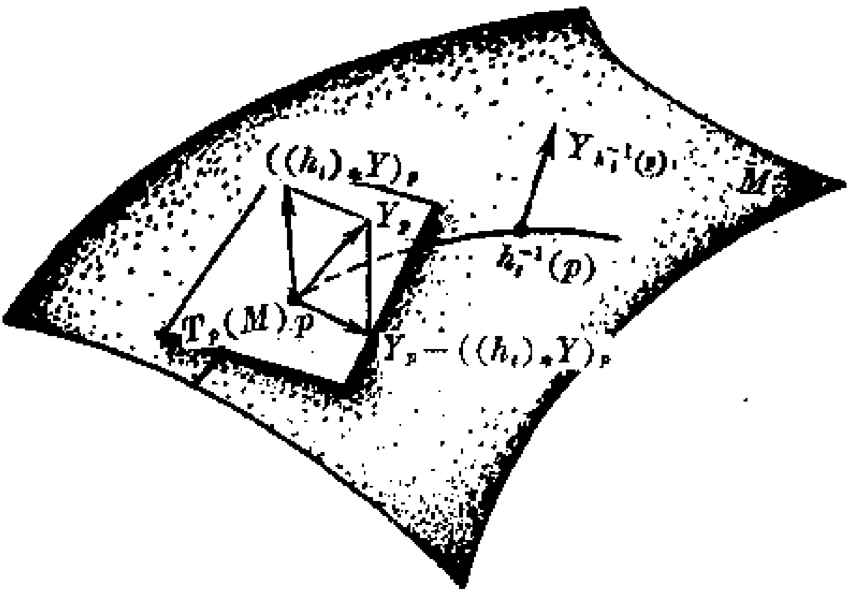


图 55

如果对任何 $p\in M$，存在 p 的某个邻域 V 上的 C^∞ 向量场 $X_1,\cdots,X_m$，使得对每点 $q\in V$，$\{X_1(q),\cdots,X_m(q)\}$ 构成 $X_q^{(m)}$ 的基，则称 $\boldsymbol{X}^{(m)}$**是** $\boldsymbol{C}^\infty$ **的**.

设 N 是 M 的 s 维 C^∞ 子流形，如果对每点 $p\in N$，$I_*(T_p(N))\subset X_p^{(m)}(s\leqslant m)$，则称 N 是 $X^{(m)}$ 的**广义积分流形**，当 $s=m$ 时，称 N 是**狭义积分流形**(这时 $I_*(T_p(N))=X_p^{(m)}$).

如果对每点 $p\in M$，通过 p 都存在一个 m 维的狭义积分流形，则称 $X^{(m)}$ 是**完全可积的**.

特别地，当 $m=1$ 时，其狭义积分流形就是向量场的积分曲线的推广.

定义 9 设 $X^{(m)}$ 是 M 上的 m-向量场，如果对属于 $X^{(m)}$ 的任意 C^∞ 向量场 Y_1,Y_2(即 $Y_1(p),Y_2(p)\in X_p^{(m)},p\in V$)，$[Y_1,Y_2]$ 也是属于 $X^{(m)}$ 的 C^∞ 向量场，则称 $X^{(m)}$ 对[,]是**封闭的**或 $X^{(m)}$ 是**对合的**.

设 $X^{(m)}$ 是 C^∞ 的，$\{X_1,\cdots,X_m\}$ 是定义 8 中所述的 $X^{(m)}$ 的 C^∞ 基向量场，如果

$$[X_i, X_j] = \sum_{k=1}^{m} c_{ij}^k X_k \text{（属于 } X^{(m)}\text{）}, i, j = 1, \cdots, m,$$

则称$\{X_1, \cdots, X_m\}$对$[\ ,\ ]$是封闭的。

引理 2 定义 9 中，c_{ij}^k 是 V 上的 C^∞ 函数。

证明 设 $p \in M$，$\{x^i\}$是 p 的局部坐标系。则

$$[X_i, X_j]x^l = \sum_{k=1}^{m} c_{ij}^k X_k x^l, i, j = 1, \cdots, m,\ l = 1, \cdots, n.$$

由于$\{X_1, \cdots, X_m\}$是线性无关的，且

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 x^1 & \cdots & X_1 x^n \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ X_m x^1 & \cdots & X_m x^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x^1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial}{\partial x^n} \end{pmatrix},$$

所以

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} X_1 x^1 & \cdots & X_1 x^n \\ \cdots & & \\ X_m x^1 & \cdots & X_m x^n \end{pmatrix} = m.$$

不妨设在 p 点附近有

$$\det\begin{pmatrix} X_1 x^1 & \cdots & X_1 x^m \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ X_m x^1 & \cdots & X_m x^m \end{pmatrix} \neq 0,$$

则 $c_{ij}^1, \cdots, c_{ij}^m$ 可以当作未知量从头 m 个方程解出，这就证明了 c_{ij}^k是 V 上的 C^∞函数。 #

引理 3 设 $X^{(m)}$是 C^∞的，则

$X^{(m)}$是封闭的$\Longleftrightarrow\{X_1, \cdots, X_m\}$是封闭的。

证明 （$\Rightarrow$） 显然成立。

（$\Leftarrow$） 设 Y_1, Y_2是属于 $X^{(m)}$的任意 C^∞向量场，

$$Y_1=\sum_{i=1}^{m} f_i X_i,\ Y_2=\sum_{j=1}^{m} g_j X_j,$$

则类似于引理 2 的证明可知 f_i, g_j 都是 V 上的 C^∞函数．于是，

$$[Y_1,Y_2]=\Big[\sum_{i=1}^{m} f_i X_i,\ \sum_{j=1}^{m} g_j X_j\Big]=\sum_{i,j=1}^{m}[f_i X_i, g_j X_j]$$

$$=\sum_{i,j=1}^{m}\{f_i(X_i g_j)X_j-g_j(X_j f_i)X_i+f_i g_j[X_i,X_j]\}$$

也是属于 $X^{(m)}$ 的 C^∞ 向量场．　　#

定理 7　设 $X^{(m)}$是 n 维 C^∞ 流形 $(M,\mathscr{D})$ 上的 $C^\infty m$-向量场，则 $X^{(m)}$是完全可积的$\Longleftrightarrow X^{(m)}$是封闭的．

证明　($\Rightarrow$) 因为 $X^{(m)}$是完全可积的，所以对任何 $p\in M$，存在一个通过 p 的狭义积分流形 N，它是 M 的m维 C^∞子流形．取 p 的特殊局部坐标系$\{x^1,\cdots,x^n\}$，当局部坐标邻域充分小时，$\{x^1,\cdots,x^m\}$是关于 N 的 p 的局部坐标系．如果 Y_1 和 Y_2 是属于 $X^{(m)}$ 的任意 C^∞ 向量场，令

$$Y_1=\sum_{i=1}^{n} f_i\frac{\partial}{\partial x^i},\ Y_2=\sum_{i=1}^{n} g_i\frac{\partial}{\partial x^i},$$

其中 $f_i,g_j|_N=0(n\geqslant i,j\geqslant m+1)$．则

$$[Y_1,Y_2]_p=\sum_{i,j=1}^{n}\Big\{f_i\Big(\frac{\partial}{\partial x^i}g_j\Big)\frac{\partial}{\partial x^j}-g_j\Big(\frac{\partial}{\partial x^j}f_i\Big)\frac{\partial}{\partial x^i}$$

$$+f_i g_j\Big[\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}\Big]\Big\}_p$$

$$=\sum_{i,j=1}^{m}\Big[f_i\Big(\frac{\partial}{\partial x^i}g_j\Big)\frac{\partial}{\partial x^j}-g_j\Big(\frac{\partial}{\partial x^j}f_i\Big)\frac{\partial}{\partial x^i}\Big]_p$$

所以$[Y_1,Y_2]$是属于 $X^{(m)}$ 的 C^∞ 向量场(容易看出只须 $X^{(m)}$ 是 m-向量场)．

(⇐)(Frobenius 定理) 如果 $X^{(m)}$ 是封闭的，相应的 C^∞ 基向量场为 $\{X_1,\cdots,X_m\}$，下面我们证明在任意 $p\in M$，可以选取一个局部坐标系 $\{x^1,\cdots,x^n\}$，使得 $X^{(m)}$ 由向量场

$$\frac{\partial}{\partial x^1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^m}$$

张成．这时可以看出方程组

$$x^{m+1}=a^{m+1},x^{m+2}=a^{m+2},\cdots,x^n=a^n$$

给出了一小片过 p 点的积分流形．

现在用数学归纳法来证明充分性．

当 $m=1$ 时，在 p 点选取局部坐标系 (V,ψ)，$\{y^1,\cdots,y^n\}$，使 $\psi(p)=(0,\cdots,0)$ 不妨设在这局部坐标系中有

$$X_1=\sum_{i=1}^n a_i(y^1,\cdots,y^n)\frac{\partial}{\partial y^i},a_1(0,\cdots,0)\neq 0.$$

命

$$S_\varepsilon=\{(0;x^2,\cdots,x^n)\in V\,|\,|x^2|<\varepsilon,\cdots,|x^n|<\varepsilon\},$$

对 S_ε 上每点考虑 C^∞ 的微分方程组的初值问题：

$$\begin{cases}\dfrac{dy^i}{dt}=a_i(y^1,\cdots,y^n),i=1,\cdots,n. \\ y^1(0)=0,y^2(0)=x^2,\cdots,y^n(0)=x^n.\end{cases} \tag{3}$$

由常微分方程组理论可知，当 ε 充分小时，在 $W_\varepsilon=\{(t,x^2,\cdots,x^n)\,|\,|t|<\varepsilon,|x^2|<\varepsilon,\cdots,|x^n|<\varepsilon\}$ 内有一组 C^∞ 的函数

$$y^i=\varphi^i(t,x^2,\cdots,x^n),\quad i=1,\cdots,n.$$

它们满足条件 $(y^1,\cdots,y^n)\in V$，且是(3)的一组解．这样，

$$(t,x^2,\cdots,x^n)\to(y^1,\cdots,y^n)$$

就是 $W_\varepsilon\to V$ 的一个 C^∞ 映射，此外，Jacobi 行列式

$$\left.\frac{\partial(y^1,\cdots,y^n)}{\partial(t,x^2,\cdots,x^n)}\right|_{(0,\cdots,0)}=\det\begin{pmatrix} a_1 & & & 0 \\ a_2 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ a_n & 0 & & 1 \end{pmatrix}_{(0,\cdots,0)}$$

$$=a_1(0,\cdots,0)\neq 0,$$

这里$\left.\frac{\partial y^j}{\partial x^i}\right|_{(0,\cdots,0)}=\left.\frac{\partial\varphi^j(0,x^2,\cdots,x^n)}{\partial x^i}\right|_{(0,\cdots,0)}=\left.\frac{\partial x^j}{\partial x^i}\right|_{(0,\cdots,0)}$ $=\delta^j_i$. 因此，在 p 的附近可取$\{t,x^2,\cdots,x^n\}$为局部坐标系. 如记 t 为 x^1，在这局部坐标系$\{x^1,\cdots,x^n\}$中便有

$$\frac{\partial}{\partial x^1}=\sum_{j=1}^n\frac{\partial y^j}{\partial x^1}\frac{\partial}{\partial y^j}=\sum_{j=1}^n\frac{dy^j}{dt}\frac{\partial}{\partial y^j}$$

$$=\sum_{j=1}^n a_j(y^1,\cdots,y^n)\frac{\partial}{\partial y^j}=X_1.$$

设结论对$(m-1)$-向量场成立. 进而考虑m-向量场 $X^{(m)}$. 不妨设在p的局部坐标系(V,ψ)，$\{z^1,\cdots,z^n\}$中有$\psi(p)=(0,\cdots,0)$及

$$\begin{cases} X_1=\dfrac{\partial}{\partial z^1}, \\ X_2=a_{21}\dfrac{\partial}{\partial z^1}+a_{22}\dfrac{\partial}{\partial z^2}+\cdots+a_{2n}\dfrac{\partial}{\partial z^n}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ X_m=a_{m1}\dfrac{\partial}{\partial z^1}+a_{m2}\dfrac{\partial}{\partial z^2}+\cdots+a_{mn}\dfrac{\partial}{\partial z^n}. \end{cases}$$

$\left(X_1=\dfrac{\partial}{\partial z^1}\text{由} m=1 \text{时结论成立所保证.}\right)$

令

$$Y_i=X_i-a_{i1}X_1\qquad(i=2,\cdots,m),$$

则 $X_1,Y_2,\cdots,Y_m$ 是 $X^{(m)}$的一组新基. 并且$Y_2,\cdots,Y_m$ 对$[\ ,\ ]$运算是封闭的. 事实上，我们有

$$[Y_i,Y_j]=[X_i-a_{i1}X_1,X_j-a_{j1}X_1]$$

$$=[X_i,X_j]-[a_{i1}X_1,X_j]-[X_i,a_{j1}X_1]+[a_{i1}X_1,a_{j1}X_1]$$
$$=[X_i,X_j]-a_{i1}[X_1,X_j]-a_{j1}[X_i,X_1]$$
$$+[X_ja_{i1}-X_ia_{j1}+a_{i1}X_1a_{j1}-a_{j1}Xa_{i1}]X_1,$$

此式右边各项可通过 $X_1,X_2,\cdots,X_m$ 线性表示，因而也可以通过 $X_1,Y_2,\cdots,Y_m$ 线性表示，但$[Y_i,Y_j]$中不含$\frac{\partial}{\partial z^1}$项（留作习题），故 X_1 不出现在这表达式中．因此，应有

$$[Y_i,Y_j]=\sum_{k=2}^{m}c_{ij}^kY_k.$$

现在再考虑过 p 点的坐标曲面 $S=\{(z^1,\cdots,z^n)\,|\,z^1=0\}$，由于每个 Y_i 的表达式中不含$\frac{\partial}{\partial z^1}$的项，当我们限制在 S 上来看时，可以把它们视为 S 上的$(m-1)$个 C^∞ 向量场

$$\left(Y_i=\sum_{j=2}^{n}a_{ij}(0,z^2,\cdots,z^n)\frac{\partial}{\partial z^j}\right).$$

由于它们对$[\ ,\ ]$运算封闭，故据归纳假设，它们张成 S 上的一个可积$(m-1)$-向量场 $X^{(m-1)}$．因而在 S 上可取 p 附近的一个局部坐标系$\{y^2,\cdots,y^n\}$，使得

$$\frac{\partial}{\partial y^2},\cdots,\frac{\partial}{\partial y^m}$$

张成这个$X^{(m-1)}$．这时如果令

$$x^1=z^1,x^2=y^2,\cdots,x^n=y^n,$$

则$\{x^1,x^2,\cdots,x^n\}$是 p 附近的一个 M 的局部坐标系，因而可表示成

$$X_i=\sum_{l=1}^{n}b_{il}\frac{\partial}{\partial x^l}\qquad(i=1,\cdots,m).$$

我们要证明的是当 $l>m$ 时有 $b_{il}\equiv0$．为此，我们注意到，由于

$\{X_1,\cdots,X_m\}$对$[\ ,\ ]$运算封闭，故应有

$$[X_i,X_1]=\sum_{k=1}^{m}c_{i1}^{k}X_k=\sum_{l=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{m}c_{i1}^{k}b_{kl}\right)\frac{\partial}{\partial x^l},$$

但 $X_1=\dfrac{\partial}{\partial x^1}$，所以有

$$[X_i,X_1]=\left[\sum_{l=1}^{n}b_{il}\frac{\partial}{\partial x^l},\frac{\partial}{\partial x^1}\right]=\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial b_{il}}{\partial x^1}\frac{\partial}{\partial x^l}.$$

比较这两个式子可知，对于每个 $1\leqslant l\leqslant n$，系数

$$b_{1l},b_{2l},\cdots,b_{ml}$$

满足齐次线性微分方程组

$$\frac{\partial b_{il}}{\partial x^1}=\sum_{k=1}^{m}c_{i1}^{k}b_{kl}\qquad(i=1,\cdots,m).$$

但当 $x^1=z^1=0$ 时，由上述可知

$$X_i=\sum_{l=1}^{m}b_{il}(0,x^2,\cdots,x^n)\frac{\partial}{\partial x^l},$$

所以 $b_{il}(0,x^2,\cdots,x^n)=0\ (l>m)$。由满足初始条件的齐次线性微分方程组的唯一性定理推出

$$b_{il}\equiv0\quad(l>m),$$

即

$$X_i=\sum_{l=1}^{m}b_{il}\frac{\partial}{\partial x^l}.$$

这就是说，在局部坐标系$\{x^1,\cdots,x^n\}$中，m-向量场 $X^{(m)}$可由

$$\frac{\partial}{\partial x^1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^m}$$

张成。如设 p 的局部坐标为$(\alpha^1,\cdots,\alpha^n)$，则方程组

$$x^{m+1}=\alpha^{m+1},x^{m+2}=\alpha^{m+2},\cdots,x^n=\alpha^n\tag{4}$$

给出了一小片过 p 点的积分流形。

以上证明了积分流形的局部存在性. 唯一性表现在下面这个事实上,即在局部坐标系$\{x^1,\cdots,x^n\}$中,过p的任何一片连通的积分流形N都落在积分流形(2)上. 事实上,设$q\in N$,由N的连通性,存在一条N上的分段C^∞曲线σ(σ是连续曲线,并且分成有限段,在每一段上是C^∞的)和p相连结. 另一方面,因为N是积分流形,故σ上每点(各段的交界点除外)的切向量具有形式

$$T_\sigma(t)=\sum_{i=1}^{m}c^i(t)\frac{\partial}{\partial x^i},$$

因而沿σ有

$$\frac{dx^l}{dt}=T_\sigma(t)\cdot x^l=\left[\sum_{i=1}^{m}c^i(t)\frac{\partial}{\partial x^i}\right]x^l=0\quad(l>m),$$

$$x^l(q)=x^l(p)=a^l\quad(l>m).\qquad\#$$

4. 向量场的变换

定义 10 设$(M_1,\mathscr{D}_1)$和$(M_2,\mathscr{D}_2)$分别是m维和n维C^∞流形. $F:M_1\to M_2$是C^∞映射. X和Y分别是M_1和M_2的C^∞向量场. 如果

$$F_{*p}(X_p)=Y_{F(p)},\ p\in M_1,$$

则称X和Y是**F-相关的**,记成$F_*(X)=Y$. 上式等价于:对M_2上任何C^∞函数f有

$$F_{*p}(X_p)f=Y_{F(p)}f,$$

或
$$X_p(f\circ F)=(Yf)_{F(p)}=(Yf)\circ F(p)$$

$$X(f\circ F)=(Yf)\circ F.$$

例 5 设X是向量场,$F_*(X)$是否仍是向量场? 举反例如下:

$M_1=R^2$, $M_2=R^1$, F: $R^2\to R^1$, $u=F(x,y)=x$, 向量$X=y\dfrac{\partial}{\partial x}$.

设 $p=(0,0)$，$q=(0,1)$，显然 $F(p)=0=F(q)$且

$$F_{*q}(X_q)=F_{*q}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial u}\neq 0=F_{*p}(X_p).$$

但是，如果F是C^∞微分同胚，则F_*X $((F_*X)_{F(p)}=F_{*p}(X_p))$是向量场。更进一步，当$X$是$C^\infty$向量场时，$F_*X$也是$C^\infty$向量场（留作习题）。

定理 8 设 $F_*X_i\doteq Y_i$ $(i=1,2)$，则

$$F_*[X_1,X_2]\doteq[Y_1,Y_2].$$

特别当F是C^∞微分同胚时，设 $F_*(X_i)=Y_i$ $(i=1,2)$，则 $F_*[X_1,X_2]=[F_*X_1,F_*X_2]$.

证明 $[Y_1,Y_2]_{F(p)}f=(Y_1)_{F(p)}(Y_2f)-(Y_2)_{F(p)}(Y_1f)$

$$\begin{aligned}
&=F_{*p}(X_1)_p(Y_2f)-F_{*p}(X_2)_p(Y_1f)\\
&=(X_1)_p(Y_2f\circ F)-(X_2)_p(Y_1f\circ F)\\
&=(X_1)_p(X_2(f\circ F))-(X_2)_p(X_1(f\circ F))\\
&=[X_1,X_2]_p(f\circ F)\\
&=F_{*p}([X_1,X_2]_p)f.
\end{aligned}$$ #

4.2 习 题

1. 证明$\dfrac{\partial}{\partial x^i}$在其坐标邻域中是$C^\infty$向量场。

2. 设X是C^∞流形M上的向量场，$\{X_i\}$是M上的C^∞基向量场，且$X=\sum_{i=1}^{n}\lambda^iX_i$，则$X$是$M$上的$C^\infty$向量场$\Longleftrightarrow\lambda^i$是$M$上的$C^\infty$函数$(i=1,\cdots,n)$。

3. 设 $X_p\in T_p(M)$，证明

(1°) 存在 p 的一个坐标邻域U及U上的一个C^∞向量场$\tilde{X}$，使得$\tilde{X}_p=X_p$。

(2°) 存在M上的一个C^∞向量场$\tilde{X}$，使得$\tilde{X}_p=X_p$。

4. 设M是R^n的k维C^∞正则子流形，

$$I: M \to R^n,$$

是包含映射。$\{u^i | i=1, \cdots, k\}$为M的局部坐标系，$\{x^i | i=1, \cdots, n\}$为R^n的通常的整体坐标。则由第二章§4.1(4)得到

$$\begin{pmatrix} I_*\left(\frac{\partial}{\partial u^1}\right) \\ \vdots \\ I_*\left(\frac{\partial}{\partial u^k}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial u^1} \cdots \frac{\partial x^n}{\partial u^1} \\ \cdots \ \cdots \ \cdots \\ \frac{\partial x^1}{\partial u^k} \cdots \frac{\partial x^n}{\partial u^k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x^1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x^n} \end{pmatrix}$$

研究具体例子：

(1°) 画出 R^n 中整体 C^∞ 向量场$\frac{\partial}{\partial x^i}$的示意图。

(2°) 在R^2中，取 p 点($p \neq (0,0)$)的局部坐标系(r,θ)(极坐标)，画出局部C^∞向量场$\frac{\partial}{\partial r}$和$\frac{\partial}{\partial \theta}$的示意图 (其中$(x^1,x^2)=(r\cos\theta, r\sin\theta)$)。

说明$\frac{\partial}{\partial r}$和$\frac{\partial}{\partial \theta}$是 $R^2-\{(0,0)\}$上的C^∞向量场的理由。并将它们表示为$\left\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}\right\}$的线性组合。

(3°) 在 R^3 中，取 p 点($p \neq (0,0,z)$) 的局部坐标系 (r,θ,z) (柱坐标)，画出局部 C^∞ 向量场$\frac{\partial}{\partial r}$, $\frac{\partial}{\partial \theta}$ 和$\frac{\partial}{\partial z}$ 的示意图(其中$(x^1,x^2,x^3)=(r\cos\theta, r\sin\theta, z)$)。

说明这些 C^∞向量场可延拓到多大范围。并将它们表示为$\left\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3}\right\}$的线性组合。

(4°) 在 R^3 中，取 p 点($p \neq (0,0,z)$)的局部坐标系(r,θ,φ) (球坐标)，画出局部C^∞向量场 $\frac{\partial}{\partial r}$, $\frac{\partial}{\partial \theta}$和$\frac{\partial}{\partial \varphi}$的示意图(其中$(x^1,x^2,x^3)=(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)$)。

说明这些C^∞向量场可延拓到多大范围。并将它们表示为$\left\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3}\right\}$的线性组合。

(5°) 证明(1°)—(4°)中各坐标系都是正交坐标系(即坐标向量彼此正交)。

(6°) 设单位圆 $M=S^1=\{(x^1,x^2)|(x^1)^2+(x^2)^2=1\}$，$\{\theta\}$为 S^1 的局部坐标系，这里$(x^1,x^2)=(\cos\theta,\sin\theta)$。

将 $I_*\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right)$表示为$\left\{\frac{\partial}{\partial x^1},\ \frac{\partial}{\partial x^2}\right\}$的线性组合，证明 $I_*\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right)$与 $\cos\theta\frac{\partial}{\partial x^1}+\sin\theta\frac{\partial}{\partial x^2}$ 正交。说明$\frac{\partial}{\partial\theta}$是 S^1 上的整体的 C^∞ 基向量场。画出 $I_*\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right)$ 的示意图。

(7°) 设圆柱面 $M=\{(x^1,x^2,x^3)|(x^1)^2+(x^2)^2=1\}$，$\{\theta,z\}$为 M的局部坐标系，这里$(x^1,x^2,x^3)=(\cos\theta,\sin\theta,z)$。

将 $I_*\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right)$和 $I_*\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)$ 表示为 $\left\{\frac{\partial}{\partial x^1},\ \frac{\partial}{\partial x^2},\ \frac{\partial}{\partial x^3}\right\}$的线性组合，证明 $I_*\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right)$，$I_*\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)$与 $\cos\theta\frac{\partial}{\partial x^1}+\sin\theta\frac{\partial}{\partial x^2}$ 彼此正交。说明$\left\{\frac{\partial}{\partial\theta},\ \frac{\partial}{\partial z}\right\}$是$M$上的整体的 C^∞ 基向量场。画出 $I_*\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right)$和 $I_*\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)$的示意图。

(8°) 设单位球面 $M=S^2=\{(x^1,x^2,x^3)|(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2=1\}$，$\{\theta,\varphi\}$为 S^2 的局部坐标系，这里$(x^1,x^2,x^3)=(\sin\theta\cos\varphi,\sin\theta\sin\varphi,\cos\theta)$。

将 $I_*\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right)$和 $I_*\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)$表示为 $\left\{\frac{\partial}{\partial x^1},\ \frac{\partial}{\partial x^2},\ \frac{\partial}{\partial x^3}\right\}$ 的线性组合，证明 $I_*\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right)$，$I_*\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)$ 与 $\sin\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial x^1}+\sin\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial x^2}+\cos\theta\frac{\partial}{\partial x^3}$ 彼此正交。说明 C^∞ 向量场 $\frac{\partial}{\partial\theta}$和$\frac{\partial}{\partial\varphi}$可延拓到多大范围。$\left\{\frac{\partial}{\partial\theta},\ \frac{\partial}{\partial\varphi}\right\}$是 S^2 上的整体的 C^∞ 基向量场吗？画出 $I_*\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right)$和 $I_*\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)$的示意图。

5. 设$\{\theta,\varphi\}$为环面 $S^1\times S^1$ 的局部坐标系。说明 $\left\{\frac{\partial}{\partial\theta},\ \frac{\partial}{\partial\varphi}\right\}$ 是$S^1\times S^1$ 上的整体 C^∞ 基向量场。

指出题 4 和题 5 中各 C^∞ 向量场的积分曲线。

6. 定义：如果 n 维 C^∞ 流形M有一个整体的 C^∞ 基向量场，则称M为可平行的。

指出题 4 和题 5 中哪些流形是可平行的。

7. 在例 4 中用具体例子：柱面和单位球面讨论之。

8. 定义：设 M_1 是 M_2 的 C^∞ 正则子流形，所谓定义在 M_1 上的一个广义向量场 X 是一个映射，它对任何 $p\in M_1$，唯一对应着一个向量

$$X_p\in T_p(M_2).$$

如果对任何 $p\in M_1$，有 p 在 M_2 中的局部坐标系 (U,φ)、$\{x^i\}$，使得 $X=\sum_{i=1}^{n}a^i\frac{\partial}{\partial x^i}$，且 a^i 是 $M_1\cap U$ 上的 C^∞ 函数，则称 X 是 M_1 上的 C^∞ 广义向量场。

证明 (1°) 若 $\overline{X}$ 为 M_2 上的 C^∞ 向量场，则 $\overline{X}|_{M_1}$ 是 M_1 上的广义 C^∞ 向量场。但反之不成立。

(2°) 如果 X 是 M_1 上的 C^∞ 广义向量场，则对任何 $p\in M_1$，存在 p 在 M_2 中的局部坐标系 (U_p,φ_p)、$\{x^i\}$，使得 X 可延拓为 U_p 上的 C^∞ 向量场 $\overline{X}$，且 $\overline{X}|_{M_1\cap U_p}=X$。

(3°) 如果 M_2 为 A_2 空间，问(2°)中的 X 能否延拓为含 M_1 的开集 U (M_2 中的)上的广义 C^∞ 向量场 $\overline{X}$？

(4°) 如果 M_2 为 A_2 空间，问(2°)中的 X 能否延拓为 M_2 上的 C^∞ 向量场？M_1 为 M_2 的闭集呢？

9*. 设 $S^n=\{(x^1,\cdots,x^{n+1})\in R^{n+1}|(x^1)^2+\cdots+(x^{n+1})^2=1\}$，证明

(1°) 当 n 为奇数时，S^n 上有整体的处处非 0 的 C^∞ 切向量场。

(2°) 当 n 为偶数时，S^n 上无整体的处处非 0 的 C^0 (连续) 切向量场。

参看 P. J. 希尔顿，S. 瓦理[5]255 页。

10. 设 $(M,\mathscr{D})$ 是 n 维 C^∞ 流形，$\mathscr{D}=\{(U,\varphi)\}$。$T(M)=\bigcup_{p\in M}T_p(M)=\{X_p|X_p\in T_p(M),p\in M\}$。设投影

$$\pi_1:T(M)\to M,\pi_1(X_p)=p.$$

如果 (U,φ)，$\{x^i\}$ 是 M 上的局部坐标系，$U^*=\pi_1^{-1}(U)$。命

$$\pi_2:U^*\to R^n,\pi_2(X_p)=(a^1,\cdots,a^n)\left(这里\ X_p=\sum_{i=1}^{n}a^i\frac{\partial}{\partial x^i}\right).$$

$\varphi^*: U^* \to R^{2n}, \varphi^*(X_p) = (\varphi \circ \pi_1(X_p), \pi_2(X_p)) = (\varphi(p), \pi_2(X_p))$.

(1°) 证明 $\{(U^*, \varphi^*)\}$确定了$T(M)$上的一个C^∞微分构造$\mathscr{D}^*$，我们称$(T(M), \mathscr{D}^*)$为M上的**切丛**(它是$2n$维的C^∞流形)。

(2°) 证明 M上的C^∞向量场X是$M \to T(M)$的C^∞映射。

(3°) 如果$F: M_1 \to M_2$是C^∞映射，则F_*是$T(M_1) \to T(M_2)$的C^∞映射。

(4°) 如果$(M, \mathscr{D}) = (R^n, \mathscr{D}_0)$是通常的$C^\infty$流形，证明$(T(R^n), \mathscr{D}_0^*)$就是$R^n \times R^n = R^{2n}$上的通常的$C^\infty$流形。

11. 在R^n中，求出C^∞向量场$X=0$和$X=\dfrac{\partial}{\partial x^i}$的1参数群$h_t$。

12. 设h_t是定义在$(-\varepsilon, \varepsilon) \times M$上的局部1参数群，证明它可以延拓到$R^1 \times M$使$h_t$是整体的1参数群(提示：参看第二章§4.3定理7的证法)。

举出C^∞流形$(M, \mathscr{D})$上的一个C^∞向量场X，它只有局部的1参数群，但无整体的1参数群。

13. 设$F: M_1 \to M_2$是C^∞微分同胚，X是M_1上的C^∞向量场，证明F_*X是M_2上的C^∞向量场。

证明：M_1上的C^∞向量场的全体形成一个R上的无限维向量空间。而F_*将此空间同构地映为M_2上的C^∞向量场所形成的R上的无限维向量空间(由定理8，且有$F_*[X_1, X_2] = [F_*X_1, F_*X_2]$)。

14. 利用定理5中的(6°)，在局部坐标系中定义

$$[X, Y] = \sum_{j=1}^{n}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\alpha^i \frac{\partial \beta^j}{\partial x^i} - \beta^i \frac{\partial \alpha^j}{\partial x^i}\right)\right]\frac{\partial}{\partial x^j},$$

证明 (1°) 上式右边与局部坐标系的选取无关。因而可定义整体的C^∞向量场$[X, Y]$。

(2°) 用上述定义，证明对任何C^∞函数f有

$$[X, Y]f = X(Yf) - Y(Xf).$$

(3°) 利用本题的定义，证明定理5中的(1°)—(5°)以及定理8。(参看岩堀长庆[6])

15. 设$X^{(m)}$是C^∞流形M上的完全可积的$C^\infty m$-向量场，则过M的任一点p必有唯一的一个**极大狭义积分流形**(即它是连通的狭义积分流形，并且

任意过 p 点的连通的狭义积分流形必是它的开子流形）．此外，M可以划分为彼此不相交的若干极大积分流形。

16．设(x,y,z)是 R^3 中的通常整体坐标，而 $X=z\frac{\partial}{\partial y}-y\frac{\partial}{\partial z}$，

$$Y=-z\frac{\partial}{\partial x}+x\frac{\partial}{\partial z},\ Z=y\frac{\partial}{\partial x}-x\frac{\partial}{\partial y}$$是 R^3 中的C^∞ 向量场。

（1°）证明映射 $h:\{aX+bY+cZ\mid a,b,c\in R\}\to R^3$

$$aX+bY+cZ\to(a,b,c)$$

是一个同构．

（2°）证明 C^∞ 向量场 $aX+bY+cZ$ 的流线（积分曲线）是 R^3 中绕着过原点的某个轴的旋转而成的。

（3°）如果$U,V\in\{aX+bY+cZ\mid a,b,c\in R\}$ 则$[U,V]\in\{aX+bY+cZ\mid a,b,c\in R\}$且

$$h([U,V])=h(U)\times h(V)\qquad (R^3\text{ 中的叉积})．$$

17.* 设K是 n 维C^∞ 流形$(M,\mathscr{D})$的紧致子集，则在 $M-K$中恒为 0 的 C^∞ 向量场X是完备的。

4.3 Lie 群和 Lie 代数

1．Lie 群

定义 1 集合G称为 **C^∞Lie 群**，如果它满足条件：

（1°）G是C^∞流形；

（2°）G是群；

（3°）群运算是C^∞的．即乘法运算

$$\cdot:G\times G\to G$$
$$(a,b)\to a\cdot b$$

和逆运算

$$J:G\to G$$
$$a\to a^{-1}$$

都是C^∞映射（$G\times G$表示C^∞积流形）。

注 如果G是 C^ω 流形（实解析流形），群运算是 C^ω 映射，则

称 G 为 C^ωLie 群(或实解析 Lie 群)。类似地可以定义复解析 Lie 群。

注：由 $J\circ J(a)=J(a^{-1})=(a^{-1})^{-1}=a$ 可知 $J:G\to G$ 是 C^∞ 微分同胚。

例 1　向量群 R^n

$G=R^n$，群运算取作加法，即对 $x=(x^1,\cdots,x^n)$ 和 $y=(y^1,\cdots,y^n)$，定义

$$x+y=(x^1+y^1,\cdots,x^n+y^n),$$

单位元素(即零向量)$0=(0,\cdots,0)$，x 的逆元素（即 x 的负元素）$-x=(-x^1,\cdots,-x^n)$。其 C^∞ 构造如第二章 § 2.1 例 1 所述，于是 R^n 就成为 C^∞ Lie 群（其实是 C^ωLie 群)，称 R^n 为 n 维向量群。

例 2　线性群

$G=GL(n,R)=\{A$ 是 n 阶实矩阵$|\det A\neq 0\}$，如果 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots a_{1n} \\ \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots a_{nn}\end{pmatrix}$ 看成 R^{n^2} 中的点 $(a_{11},\cdots,a_{1n},a_{21},\cdots,a_{2n},\cdots,a_{n1},\cdots,a_{nn})$，则 $GL(n,R)$ 是 R^{n^2} 的开子流形，因而它是 n^2 维 C^∞ 流形。根据矩阵的乘法，$GL(n,R)$ 构成一个群。显然，单位元素是单位矩阵 $I=\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1\end{pmatrix}$，$A$ 的逆元素是逆矩阵 A^{-1}。容易证明群运算是 C^∞ 的。事实上，设 $A=(a_{ij}),B=(b_{ij})\in GL(n,R)$，令 $A\cdot B=(c_{ij}),A^{-1}=(d_{ij})$，则 $c_{ij}=\sum\limits_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$。因此，$c_{ij}$ 是 a_{ik} 和 b_{kj} 的 C^∞ 函数，又由于 $\{a_{ij}\}$，$\{b_{ij}\}$ 是局部坐标，所以乘法运算 $(A,B)\to A\cdot B$ 是 C^∞ 映射。因为 d_{ij} 是 a_{ij} 的有理式，其分母

$\det A\neq 0$，所以 d_{ij} 是 a_{ij} 的 C^∞函数．由此可知，$GL(n,R)$构成一个 C^∞Lie 群，称为 n 次**实一般线性群**(其实是 C^ωLie群)．

类似地，以复数为元素的 n 阶矩阵的全体可以看作是 R^{2n^2}．其中行列式不等于 0 的矩阵的全体所成的集合记作 $GL(n,C)$，与 $GL(n,R)$一样，它构成的 Lie 群称为 n **次复一般线性群** ($GL(n,C)$也是复解析 Lie 群)．

例 3　圆环群 $T^1=S^1$

$S^1=\{e^{i\theta}|\theta$ 为实数$\}$．从第二章 § 2.1 例 4 可知 S^1 是 C^∞流形．再由

$$e^{i\theta}\cdot e^{i\eta}=e^{i(\theta+\eta)}$$

给出了 S^1 的群的乘法运算．单位元素是 $e^{i0}=1$，$e^{i\theta}$ 的逆元素是 $e^{-i\theta}$．显然，群运算是 C^∞ 的．因此，S^1 构成了一个 C^∞Lie 群，称 $T^1=S^1$ 为 1 维的**圆环群**．

例 4　设 G_1 和 G_2 是 C^∞Lie 群．一方面把 $G_1\times G_2$ 作为 C^∞积流形．另一方面，把 $G_1\times G_2$ 作为群的直积，这时，$(g_1,g_2)\cdot(g_1',g_2')=(g_1\cdot g_1',g_2\cdot g_2')$．容易验证$G_1\times G_2$也是 C^∞Lie 群，称为 C^∞Lie 群 G_1 和 G_2 的**直积**．类似地可以定义 C^∞Lie 群 $G_1,\cdots,G_k$ 的直积为 $G_1\times\cdots\times G_k$．

如 n **维圆环群** $T^n=\underbrace{S^1\times\cdots\times S^1}_{n\text{个}}$．

定理 1　定义 1 中的条件(3°)，群运算是 C^∞的

$\Longleftrightarrow G\times G\to G,(x,y)\to x\cdot y^{-1}$ 是C^∞的．

$\Longleftrightarrow G\times G\to G,(x,y)\to x\cdot y$ 是C^∞的．

证明　(1°)　($\Rightarrow$)　因为$(x,y)\to(x,y^{-1})$和$(x,y^{-1})\to x\cdot y^{-1}$是$C^\infty$的，所以$(x,y)\to x\cdot y^{-1}$也是$C^\infty$的．

($\Leftarrow$)　因为 $y\to(e,y)$和$(e,y)\to e\cdot y^{-1}=y^{-1}$ 是C^∞的，所以，$y\to y^{-1}$是C^∞的(其中 e 是群G的单位元素)．

此外，从$(x,y)\to(x,y^{-1})$和$(x,y^{-1})\to x\cdot(y^{-1})^{-1}=x\cdot y$是$C^\infty$的，可以推出$(x,y)\to x\cdot y$也是$C^\infty$的。

(2°) (⇒) 显然成立。

(⇐) 只须证明$G\to G$，$x\to x^{-1}$是C^∞的。为此，取e的一个局部坐标系，并将$x,y\in G$的坐标记为x^i和y^i，则在此坐标系内，$(x\cdot y)^i=\varphi^i(x,y)$，此处$\varphi^i$是$C^\infty$的，且$\varphi^i(e,y)=y^i$。因此，

$$\left(\frac{\partial\varphi^i}{\partial y^j}\right)_{x=y=e}=\delta^i_j,$$

由隐函数定理，方程组$(x\cdot y)^i=\varphi^i(x,y)=e^i$在$e$附近有唯一的$C^\infty$的解$y^i=\theta^i(x)$。但在$x\cdot y=e$时，$y=x^{-1}$，所以映射$x\to x^{-1}$在$e$是$C^\infty$的。由于$x\to a^{-1}\cdot x\to(a^{-1}\cdot x)^{-1}\to(a^{-1}\cdot x)^{-1}\cdot a^{-1}=x^{-1}$得到映射$x\to x^{-1}$在$a$是$C^\infty$的。 #

定义 2 设H是C^∞Lie群G的子群，给H一个C^∞流形的构造。关于这个C^∞构造，如果H是C^∞流形G的子流形，并且它本身也是一个C^∞Lie群时，则称H**为**G**的Lie子群**。

定理 2 设H是C^∞Lie群G的C^∞正则子流形，而且作为抽象群是G的子群，则H是G的Lie子群。

证明 因为$H\times H\to G\times G$，$(h_1,h_2)\to(h_1,h_2)$和$G\times G\to G$，$(h_1,h_2)\to h_1\cdot h_2$都是$C^\infty$映射，所以$H\times H\to G$，$(h_1,h_2)\to h_1\cdot h_2$是$C^\infty$映射。根据第二章§2.3习题12可知$H\times H\to H$，$(h_1,h_2)\to h_1\cdot h_2$也是$C^\infty$映射。同理可证$H\to H$，$h\to h^{-1}$是$C^\infty$映射。

#

例 5 第二章§2.3例4中，

$$S^1\times S^1=\{(e^{2\pi\theta_1 i},e^{2\pi\theta_2 i})\}$$

是一个2维C^∞Lie群。而

$$H=\{(e^{2\pi ti},e^{2\pi ati})\}$$

是$S^1\times S^1$的子群。

当a为有理数时，H是1维正则子流形，它是$S^1\times S^1$的闭Lie

子群.

当 α 为无理数时，$\overline{H}=S^1\times S^1\neq H$，它是 $S^1\times S^1$ 的非闭 Lie 子群. 它可作为定理 2 的逆定理不成立的一个反例. 即 H 虽是 $S^1\times S^1$ 的 Lie 子群，但不是 $S^1\times S^1$ 的正则子流形.

2. 变换群

定义 3 设 G 是 C^∞Lie 群，M 是 C^∞流形. 如果 C^∞映射

$$F:\ G\times M\to M$$
$$(g,p)\to F(g,p)$$

(记 $F(g,p)=gp$)满足条件：

(1°) $ep=p\ (p\in M)$，e 为 G 的单位元素.

(2°) $g_1(g_2p)=(g_1\cdot g_2)p\qquad(p\in M,g_1,g_2\in G)$，

则称 G **左方 C^∞ 作用于 M**.

设 $a\in G$ 是一固定元素，则

$$F_a:\ M\to M$$
$$p\to F_a(p)=ap$$

是 C^∞微分同胚. 事实上，F 是 C^∞映射以及

$$F_{a^{-1}}(F_a(p))=F_{a^{-1}}(ap)=a^{-1}(ap)=(a^{-1}\cdot a)p=ep=p,$$

同理 $F_a(F_{a^{-1}}(p))=p$. 于是 $F_a^{-1}=F_{a^{-1}}$也是 C^∞映射. 有时，我们也称由 $M\to M$ 的 C^∞微分同胚为 **C^∞变换**. 因此，G 左方 C^∞作用于 M 时，称 G 是 M 的**左方变换群**. 类似地，可定义**右方变换群**.

例 6 设 $M=R^n$，$G=GL(n,R)$，$x\in M$，$A\in GL(n,R)$. 我们定义 $y=Ax$ 为

$$\begin{pmatrix}y^1\\ \vdots\\ y^n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}\cdots a_{1n}\\ \cdots\cdots\cdots\\ a_{n1}\cdots a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x^1\\ \vdots\\ x^n\end{pmatrix}$$

显然，G 左方 C^∞作用于 M. $GL(n,R)$就是 R^n 的**线性变换群**.

例 7 设 $M=G$，则

$$F_a:\ G\to G$$

$$p \to F_a(p) = a \cdot p$$

（·表示群的乘法）．于是 C^∞Lie 群 G 左方作用于 G．类似地 C^∞Lie 群 G 也可右方作用于 G。

定义 4 设 C^∞Lie 群 G 左方作用于 C^∞ 流形 M．对于固定的 $p \in M$，

$$H_p = \{a \in G \mid ap = p\}$$

显然是 G 的闭集，而且是 G 的子群．H_p 称为点 p 的固定群．

定理 3 点 p 的固定群 H_p 是 G 的 C^∞ 正则子流形，并且 H_p 是 G 的闭 C^∞Lie 子群．

证明 对于固定的 $g \in G$，我们定义 C^∞ 映射

$$\begin{aligned} L_g:&\ G \to G \\ a \to L_g(a) &= g \cdot a \\ R_g:&\ M \to M \\ q \to R_g(q) &= gq \\ \theta:&\ G \to M \\ a \to \theta(a) &= ap \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc} a & L_g\ \ L_g(a) = g \cdot a & \\ G & \xrightarrow{\qquad\qquad} & G \\ \theta \Big\downarrow & & \Big\downarrow \theta \\ M & \xrightarrow[\qquad R_g \qquad]{} & M \\ \theta(a) = ap & & \theta \circ L_g(a) = R_g \circ \theta(a) \end{array}$$

则有 $\theta \circ L_g = R_g \circ \theta$．事实上，

$$\theta \circ L_g(a) = \theta(g \cdot a) = (g \cdot a)p = g(ap) = R_g \circ \theta(a).$$

因此，

$$(\theta_*)_{g \cdot a} \circ (L_{g*})_a = (R_{g*})_{ap} \circ (\theta_*)_a.$$

由于 L_g 和 R_g 分别是 G 和 M 的 C^∞ 变换，因此它们的 Jacobi 式在任何点上都不等于 0．这就推出了

$$(\mathrm{rank}\theta)_{g \cdot a} = (\mathrm{rank}\theta)_a,$$

即 $\mathrm{rank}\theta$ 在 G 上的任何一点都是定值．根据第二章 § 2.3 定理 3 可知

$$H_p = \{a \in G \mid ap = p\} = \{a \in G \mid \theta(a) = p\}$$

是 G 的 C^∞ 正则子流形．

再由定理 2 可知 H_p 是 G 的 C^∞Lie 子群. H_p 是 G 的闭集是显然的(留作习题). #

例 8 设 $GL(n,R)$ 对 $R^1=R$ 作用如下:

$$F:\ GL(n,R)\times R\to R$$

$$(A,x)\to F(A,x)=A\cdot x=(\det A)x.$$

因为 $1=A\cdot 1=\det A$,所以 $x=1$ 的固定群

$$H_1=\{A\in GL(n,R)\mid \det A=1\}.$$

记此群为 $SL(n,R)$,显然,它是 $GL(n,R)$的正则子流形,也是 $GL(n,R)$的闭的 C^∞Lie子群(由定理 2 和定理 3),这个群称为 n 次实特殊线性群.

类似地,$GL(n,C)$的 C^∞Lie 子群

$$SL(n,C)=\{A\in GL(n,C)\mid \det A=1\}$$

称为 n 次复特殊线性群($SL(n,C)$是复解析 Lie 群).

3. 左(右)移、左(右)不变向量场和 Lie 代数

定义 5 设 G 是 C^∞Lie 群,$a\in G$. 我们称 C^∞变换

$$L_a:\ G\to G$$

$$x\to L_a(x)=a\cdot x$$

和

$$R_a:\ G\to G$$

$$x\to R_a(x)=x\cdot a$$

为 G 的**左移**和**右移**.

因为 L_a(或 R_a)是群流形 G 到它自身之上的 C^∞ 微分同胚,并且对任意两点 $a,b\in G$,左移 $L_{ab^{-1}}$ 将 a 映成 b, 所以 $\{L_a\mid a\in G\}$是可迁地作用在群流形 G 上的变换群. 由于这个变换群可迁地作用在群流形 G 上, 群流形从其局部微分性质来看具有某种均匀性: 在一点附近成立的性质, 在其它点的附近也成立.

定义 6 设 X 是 C^∞Lie 群 G 上的向量场,如果对任何 a, $b\in G$, 有

$$(L_{ba^{-1}})_{*a}X_a=X_b,$$

则称X为**左不变向量场**．类似地可以定义**右不变向量场**．如果X既是左不变的又是右不变的，我们称X为**(两侧)不变向量场**．

定理 4 X为C^∞Lie 群G上的左不变向量场

$\Longleftrightarrow$对任何$a\in G$，$X_a=(L_a)_{*e}X_e$，(X由X_e完全确定)．

$\Longleftrightarrow$对任何$a\in G$，$X=(L_a)_*X$．

此外，X是C^∞向量场．

证明 如果X是左不变的，则$X_a=(L_{ae^{-1}})_{*e}X_e=(L_a)_{*e}X_e$．反之，如果令

$$X_a=(L_a)_{*e}X_e$$

(对任何$a\in G$)，则X是左不变向量场．事实上，$(L_{ba^{-1}})_{*a}X_a=(L_{ba^{-1}})_{*a}((L_a)_{*e}X_e)=(L_{ba^{-1}a})_{*e}X_e=(L_b)_{*e}X_e=X_b$．

如果X是左不变的，则$((L_a)_*X)_b=(L_a)_{*a^{-1}b}X_{a^{-1}b}=(L_{b(a^{-1}b)^{-1}})_{*a^{-1}b}X_{a^{-1}b}=X_b$，即$(L_a)_*X=X$；反之，如果对任何$a\in G$，$(L_a)_*X=X$，则$X_a=((L_a)_*X)_a=(L_a)_{*e}X_e$(对任何$a\in G$)，即$X$是左不变的．

最后再证明X是C^∞的．显然，只须证明X在单位元素e的附近是C^∞即可．为此，我们在点e的一个邻域W中取一局部坐标系$\{w^i\}$．由于$e\cdot e=e$，故可取e的两个邻域U和V，它们相应的局部坐标系为$\{u^i\}$和$\{v^i\}$，并且使得对任意$u\in U$，$v\in V$有$u\cdot v\in W$．这里(G是n维C^∞Lie 群)

$$w^i=g_i(u^1,\cdots,u^n;v^1,\cdots,v^n)$$

是关于$u^1,\cdots,u^n$和$v^1,\cdots,v^n$的C^∞函数．不妨设$e=(0,\cdots,0)$．对任意$u\in U$，左移L_u在点$v=e$的 Jacobi 方阵

$$\left(\frac{\partial g_i}{\partial v^j}(u^1,\cdots,u^n;0,\cdots,0)\right)$$

中的每个元素都是$u^1,\cdots,u^n$的C^∞函数，则$X_u=(L_u)_{*e}(X_e)$是$u^1,\cdots,u^n$的C^∞向量场． #

定义 7 设V是域F上的n维向量空间．如果在V中定义的

"乘法"运算

$$[\ ,\ ]: V\times V\to V$$

$$(X,Y)\to[X,Y],$$

满足下列条件：

(1°) $[\lambda X+\mu Y, Z]=\lambda[X,Z]+\mu[Y,Z]$(左分配律)。

(2°) $[X,Y]=-[Y,X]$(反称性)。

(3°) $[X,[Y,Z]]+[Y,[Z,X]]+[Z,[X,Y]]=0$ (Jacobi 律)。这里 $\lambda,\mu\in F$, $X,Y,Z\in V$, 则我们称 V 为 F 上的 Lie 代数(或 Lie 环)。

显然，从(1°)和(2°)立即可推出$[Z,\lambda X+\mu Y]=\lambda[Z,X]+\mu[Z,Y]$(右分配律)。此外，如果域 F 不是特征 2 的(参看 B.L. 范德瓦尔登[7] 127 页)，则有$[X,X]=0$(幂零律)(留作习题)。

定理 5 设 $L(G)$是 C^∞Lie 群 G 上左不变向量场的全体。则 $L(G)$是实数域 R 上的 n 维向量空间，并且关于 Lie 导数运算$[\ ,\ ]$是 R 上的 n 维 Lie 代数(称为 **C^∞Lie 群 G 的 Lie 代数**)。

证明 设 $\lambda,\mu\in R$, $X,Y\in L(G)$。则由

$$(L_a)_*(\lambda X+\mu Y)=\lambda(L_a)_*X+\mu(L_a)_*Y=\lambda X+\mu Y \qquad (a\in G)$$

和

$$(L_a)_*[X,Y]=[(L_a)_*X,(L_a)_*Y]=[X,Y]$$

可以推出 $\lambda X+\mu Y\in L(G)$, $[X,Y]\in L(G)$。

此外，取 $T_e(G)$的一个基$\{(X_i)_e|i=1,\cdots,n\}$，则显然$\{X_i|(X_i)_a=(L_a)_{*e}(X_i)_e,\ a\in G, i=1,\cdots,n\}$为 $L(G)$的一个基。事实上，若$\sum\limits_{i=1}^n\lambda_iX_i=0$, $\lambda_i\in R$，则 $0=\left(\sum\limits_{i=1}^n\lambda_iX_i\right)_e=\sum\limits_{i=1}^n\lambda_i(X_i)_e$。于是 $\lambda_i=0(i=1,\cdots,n)$，即$\{X_i|i=1,\cdots,n\}$是线性无关的。另一方面，对任意 $X\in L(G)$, $X_e=\sum\limits_{i=1}^n\lambda_i(X_i)_e$，则 $X_a=(L_a)_{*e}X_e=$

$(L_a)_{*e}\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i (X_i)_e\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i (L_a)_{*e}(X_i)_e = \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i X_i\right)_a$，所以 $\{X_i | i=1,\cdots,n\}$是 $L(G)$ 的一个基，而 $L(G)$是一个 n 维向量空间。

最后，由第二章 § 4.2 定理 5 推出$L(G)$满足定义 7 中的条件 (1°) (2°) (3°)，所以它是一个R上的n维 Lie 代数。 #

定理 6 设G是n维C^∞ Lie 群。$\{(X_i)_e | i=1,\cdots,n\}$是$T_e(G)$的一个基，则$\{X_i | (X_i)_a = (L_a)_{*e}(X_i)_e, a\in G, i=1,\cdots,n\}$是$G$上的整体的$C^\infty$基向量场(因而$G$是可平行的)。

证明 显然只须证明，对任何$a\in G$，$\{(X_i)_a | i=1,\cdots,n\}$是线性无关的。事实上，若$0=\sum_{i=1}^n \lambda_i (X_i)_a$，则$0=\sum_{i=1}^n \lambda_i (X_i)_a = \sum_{i=1}^n \lambda_i (L_a)_{*e}(X_i)_e = (L_a)_{*e}\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i (X_i)_e\right)$，$0=\sum_{i=1}^n \lambda_i (X_i)_e$，于是$\lambda_i = 0 (i=1,\cdots,n)$，这就证明了$\{(X_i)_a | i=1,\cdots,n\}$是线性无关的。 #

例 9 由第二章 § 4.2 习题可知$S^{2n}(n=1,2,\cdots)$上无连续的处处非零的向量场，因而更无整体的连续的(因而也无C^∞的)基向量场，根据定理 6，S^{2n}不是C^∞ Lie 群(并且S^{2n}是不可平行的)。

4. 单参数子群

定义 8 设G是n维C^∞ Lie 群，如果H是群G的子群，并且又是G的 1 维连通的C^∞子流形，则称H为G的**单参数子群**。

定理 7 设G是n维C^∞ Lie 群，则G上的任一非零的左不变向量场X的过单位元素的流线是一个非显易的C^∞同态映射x：$R^1\to G$(非显易指的是 rank $x=1$)，而过$a\in G$的流线是

$$L_a\circ x: R^1\to G, \quad t\to a\cdot x(t) \quad (x(t)\text{的左陪集}).$$

反之，满足上述条件的流线的切向量所形成的切向量场就是G上的一个左不变向量场。

更进一步$H=\{x(t)|t\in R^1\}$是G的单参数子群。

证明 ($\Rightarrow$) 在单位元素e附近的一个局部坐标系中解方程组

$$\frac{dx}{dt}=X_{x(t)},\quad x(0)=e$$

可得一C^∞曲线段

$$x=x(t),\qquad -\varepsilon<t<\varepsilon.$$

今设$|t_1|<\varepsilon$. 左移$L_{x(t_1)}$将这曲线段映成

$$\bar{x}=x(t_1)\cdot x(t).$$

它所满足的微分方程是

$$\frac{d\bar{x}}{dt}=(L_{x(t_1)})_{*x(t)}X_{x(t)}=X_{x(t_1)\cdot x(t)}=X_{\bar{x}(t)}.$$

曲线$\bar{x}(t)$与$x(t_1+t)$都过点$x(t_1)$. 因此，根据唯一性定理，二者重合。这就是说，只要$|t_1|<\varepsilon$, $|t_2|<\varepsilon$, $|t_1+t_2|<\varepsilon$, 便有

$$x(t_1)\cdot x(t_2)=x(t_1+t_2)\quad (=x(t_2)\cdot x(t_1)!)$$

这样，我们就得到了从R^1到G的一个局部的C^∞同态映射。我们要把它延拓到整个R^1，为此我们注意到，对任意实数t，总可取一充分大的n，使$\left|\frac{t}{n}\right|<\varepsilon$，因而$x\left(\frac{t}{n}\right)$有意义。如果上述同态映射能延拓到整个$R^1$，那末就应有

$$x(t)=\left(x\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n. \tag{1}$$

事实上，这样一元素$x(t)$是与n之选取无关的。如果$\left|\frac{t}{m}\right|<\varepsilon$，则

$$x(t)=\left(x\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n=\left[\left(x\left(\frac{t}{mn}\right)\right)^m\right]^n=\left(x\left(\frac{t}{mn}\right)\right)^{nm}$$
$$=\left[\left(x\left(\frac{t}{mn}\right)\right)^n\right]^m=\left(x\left(\frac{t}{m}\right)\right)^m.$$

由此，我们可取(1)式作为 $x(t)$ 的定义(对任意 t)。这时对任意二实数 t_1, t_2 可取自然数 n 使，$\left|\frac{t_1}{n}\right|<\frac{\varepsilon}{2}$，$\left|\frac{t_2}{n}\right|<\frac{\varepsilon}{2}$，从而 $\left|\frac{t_1+t_2}{n}\right|<\varepsilon$。于是我们有

$$x(t_1)\cdot x(t_2)=\left(x\left(\frac{t_1}{n}\right)\right)^n\cdot\left(x\left(\frac{t_2}{n}\right)\right)^n=\left(x\left(\frac{t_1}{n}\right)\cdot x\left(\frac{t_2}{n}\right)\right)^n$$

$$=\left(x\left(\frac{t_1+t_2}{n}\right)\right)^n=x(t_1+t_2)$$

$\left(\text{这里用到可交换性 } x\left(\frac{t_1}{n}\right)\cdot x\left(\frac{t_2}{n}\right)=x\left(\frac{t_2}{n}\right)\cdot x\left(\frac{t_1}{n}\right)\right)$。这就得到了一个整体的同态映射

$$x: R^1\to G,$$
$$t\to x(t).$$

这个映射可分为解

$$t\to\frac{t}{n}\to x\left(\frac{t}{n}\right)\to\left(x\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n=x(t),$$

其中每一个均为 C^∞ 映射，故 $x=x(t)$ 是 C^∞ 曲线，它是过单位元素的 X 的流线(自己验证)。如果 $a\in G$，则 $a\cdot x(t)$ 过 $a\cdot x(0)=a\cdot e=a$。但左移将不变向量场的流线变成流线，故知过 a 的流线是 $x(t)$ 的左陪集 $a\cdot x(t)$。

反之，容易看出满足上述条件的流线的切向量所形成的切向量场与由它在 e 点的切向量 X_e 所产生的左不变向量场 X 是一致的。

最后，由于 $x: R^1\to G$ 是非显易的 C^∞ 同态映射，故 $H=\{x(t)\mid t\in R^1\}$ 是 G 的子群，且 x 是一个 C^∞ 的浸人。因为 R^1 是连通的，所以 H 也是连通的。如果映射 x 的核 $N=\{t\mid x(t)=e\}=\{0\}$，则 x 是一一映射(因而是从 $R^1\to H$ 的同构，不一定是同胚映射)，这就证明了 H 是 G 的 1 维 C^∞ 子流形。根据定义 8，H 是 G 的单参数子群。如果映射 x 的核 $N\neq\{0\}$，由于 x 是浸人，则局部是一一的，

故 0 不可能是 N 的聚点. 容易证明 N 中包含最小的正数 a，且 $N=\{na|n=0,\pm1,\cdots\}$(留作习题). 于是群 H 同构于 R^1/N. 显然，由 $x: R^1\to G$ 诱导出一个一一的 C^∞ 浸入 $\tilde{x}: R^1/N\to G$, 因为 R^1/N 是紧致的，故 $\tilde{x}$: $R^1/N\to H\subset G$ 是同胚映射. 这就证明了 $\tilde{x}$ 是 C^∞ 嵌入，而 H 是 1 维 C^∞ 正则子流形. 根据定义 8, H 是 G 的单参数子群. #

推论 1 如果定理 7 中 G 是连通的 1 维 C^∞ Lie 群，则它 C^∞ 同构于实数加法群 R^1 或同构于实数模 1 加群 R^1/N ($N=\{1,2,\cdots,n,\cdots\}$). 此外，同构映射是一个 C^∞ 微分同胚.

证明 由定理 7, 只须证明 $H=G$. 事实上，显然有 H 是 G 的非空的开集(x 是浸入). 另一方面，H 是 G 的闭集，这是因为对任何 $a\bar{\in}H$, 必有 $aH\cap H=\phi$(这里 $aH=\{a\cdot h|h\in H\}$ 是 G 的开集)，所以 $a\bar{\in}\bar{H}$, 即 H 是闭集. 由于 G 是连通的，因此，$H=G$.

由第二章 §2.2 推论 1 可知同构映射是一个 C^∞ 微分同胚.

5. 一般线性群 $GL(n, R)$ 的 Lie 代数

我们知道，如果，$\det(a_{ij})\neq0$, 那么总可取一适当的 $\varepsilon>0$, 使当 $|x_{ij}-a_{ij}|<\varepsilon$ 时，有 $\det(x_{ij})\neq0$. 因此，$GL(n, R)$ 是 R^{n^2} 中的一个开子集. 我们可以用方阵的系数作为坐标而赋给 $GL(n,R)$ 的群流形以 C^∞ 构造. 其次，如果

$$(a_{ij})(b_{ij})=(c_{ij}),\ (a_{ij})^{-1}=(d_{ij}),$$

则

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj},\ d_{ij}=|A|^{-1}A_{ji}$$

(A_{ji} 是 a_{ji} 在 (a_{ij}) 中的代数余子式).

因此，$GL(n, R)$ 是 n^2 维 C^∞ Lie 群. 如果用

$$E_{ij}=\begin{pmatrix}0\cdots0\cdots0\\ \cdots\vdots\cdots\\ 0\cdots1\cdots0\\ \cdots\vdots\cdots\\ 0\cdots0\cdots0\end{pmatrix}i\text{ 行}$$

j 列

来代表切向量$\frac{\partial}{\partial x_{ij}}$，则群流形上的切向量仍可用$n$阶方阵

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}\cdots a_{1n}\\ \cdots\cdots\cdots\\ a_{n1}\cdots a_{nn}\end{pmatrix}$$

来代表；但此时 $\det A$ 可为 0。

现在再来看一下由$U=(u_{ij})$所决定的左移

$$L_U:\ X\to UX=Y,$$

这个映射的 Jacobi方阵的系数是

$$\frac{\partial y_{ij}}{\partial x_{kl}}=\frac{\partial}{\partial x_{kl}}\left(\sum_{s=1}^{n}u_{is}x_{sj}\right)$$

$$=\begin{cases}u_{ik}, l=j,\\ 0,\ l\neq j.\end{cases}$$

因此，我们看出，在单位元素上的切向量 A 所决定的左不变向量场是：

$$X_U=\left(\sum_{k,l=1}^{n}\frac{\partial y_{ij}}{\partial x_{kl}}a_{kl}\right)=\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial y_{ij}}{\partial x_{kj}}a_{kj}\right)$$

$$=\left(\sum_{k=1}^{n}u_{ik}a_{kj}\right)=UA=(a_{ij}).$$

如果

$$Y_U = UB = \left(\sum_{k=1}^{n} u_{ik} b_{kj}\right) = (\beta_{ij})$$

是由单位元素上另一切向量

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} \cdots b_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ b_{n1} \cdots b_{nn} \end{pmatrix}$$

所决定的左不变向量场．则

$$[X, Y] = \sum_{i,j=1}^{n}\left[\sum_{k,l=1}^{n}\left(\alpha_{kl}\frac{\partial\beta_{ij}}{\partial u_{kl}} - \beta_{kl}\frac{\partial\alpha_{ij}}{\partial u_{kl}}\right)\right]\frac{\partial}{\partial u_{ij}}$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n}\left[\sum_{l=1}^{n}\left(\alpha_{il}\frac{\partial\beta_{ij}}{\partial u_{il}} - \beta_{il}\frac{\partial\alpha_{ij}}{\partial u_{il}}\right)\right]\frac{\partial}{\partial u_{ij}}$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n}\left[\sum_{l=1}^{n}(\alpha_{il}b_{lj} - \beta_{il}a_{lj})\right]\frac{\partial}{\partial u_{ij}}$$

命 $u_{ij} = \delta_{ij}$，即得

$$[X, Y]_I = \sum_{i,j=1}^{n}\left[\sum_{l=1}^{n}(a_{il}b_{lj} - b_{il}a_{lj})\right]\frac{\partial}{\partial u_{ij}}$$

这就是说，$[X, Y]$ 是由方阵 $AB-BA$ 所决定的左不变向量场．

n 阶实系数方阵的全体形成实数域 R 上的一个 n^2 维向量空间．如果再定义

$$[A, B] = AB - BA$$

它就成为一个实数域 R 上的 Lie 代数，称为全线性代数．上面的计算证明，一般线性群 $GL(n, R)$ 的 Lie 代数与全线性代数是同构的．

现在要决定 $GL(n, R)$ 的过单位元素的单参数子群就容易了．设 A 为单位元素上的切向量，由 A 产生的一个 $GL(n, R)$ 上的左不变向量场 $X_U = UA$，而过单位元素的 X_U 的流线 $U(t)$（它

是单参数子群)满足矩阵方程

$$\frac{dU}{dt}=UA, U(0)=I.$$

众所周知,这个问题的解是

$$U(t)=\exp(tA)=e^{tA}=I+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n A^n}{n!}.$$

4.3 习　　题

1. 设 M_1 和 M_2 是 C^∞ 流形,C^∞ Lie 群 G 左方 C^∞ 作用于 M_i,点 $p_i\in M_i$ 的固定群为 $H_{p_i}(i=1,2)$, 则 C^∞ Lie 群 G 通过 $(a, (q_1, q_2))\to(aq_1, aq_2)$ $(a\in G, q_i\in M_i, i=1,2)$ 左方 C^∞ 作用于 $M_1\times M_2$,并且 $(p_1,p_2)\in M_1\times M_2$ 的固定群 $H_{(p_1,p_2)}=H_{p_1}\cap H_{p_2}$.

2. 设 K 是复数 n 阶矩阵. (1°) 证明

$$G(K)=\{A\in GL(n,C)\,|\,A'KA=K\}$$

是 $GL(n,C)$ 的 C^∞ Lie 子群,它也是复解析 Lie 群.

(2°) 证明

$$G_*(K)=\{A\in GL(n,C)\,|\,A'K\bar{A}=K\}$$

是 $GL(n,C)$ 的 C^∞ Lie 子群.

若 $K=I$,则

$$G(I)=\{A\in GL(n,C)\,|\,A'A=I\}$$

称为**复直交群**,记为 $O(n,C)$.

$$G_*(I)=\{A\in GL(n,C)\,|\,A'\bar{A}=I\}$$

称为**单式群**, 记为 $U(n)$.

3. 设 K 是实数 n 阶矩阵,证明

$$G^{(R)}(K)=\{A\in GL(n,R)\,|\,A'KA=K\}$$

是 $GL(n,R)$ 的 C^∞ Lie 子群.

若 $K=I$,则

$$G^{(R)}(I)=\{A\in GL(n, R)\,|\,A'A=I\}$$

称为**实直交群**,记为 $O(n)$.

4. 设 $X_1,\cdots,X_n$ 是 C^∞ Lie 群 G 的 Lie 代数 $L(G)$ 的基 (即它们是 G

的 C^∞ 基向量场，且都是左不变向量场）．且

$$[X_i,X_j]=\sum_{k=1}^{n}c_{ij}^kX_k\quad(1\leqslant i,j\leqslant n)$$

确定了 n^3 个实数 c_{ij}^k，称为 $L(G)$ 关于 $\{X_i|i=1,\cdots,n\}$ 的**构造常数**．证明

$$\begin{cases}c_{ij}^k+c_{ji}^k=0\ (\text{特别 } c_{ii}^k=0) & (1\leqslant i,j,k\leqslant n),\\ \sum_{h=1}^{n}(c_{ij}^hc_{hk}^l+c_{jk}^hc_{hi}^l+c_{ki}^hc_{hj}^l)=0 & (1\leqslant i,j,k,l\leqslant n).\end{cases}$$

5．定义：设 G_1 和 G_2 是 C^∞Lie 群，如果映射 $F:G_1\to G_2$ 是(1°)从抽象群 G_1 到抽象群 G_2 的同构映射．

(2°) 从 C^∞ 流形 G_1 到 C^∞ 流形 G_2 的 C^∞ 同胚映射．则称 $F:G_1\to G_2$ 是 **Lie 群的同构映射**．

证明 (1°) $(L_{F(a)})_*\circ F_*=F_*\circ(L_a)_*$.

(2°) $F_*:L(G_1)\to L(G_2)$ 是 Lie 代数之间的同构（即 F_* 是向量空间之间的同构，且 $F_*[X,Y]=[F_*X,F_*Y]$）．

6．证明 (1°) $L_a=J\circ R_{a^{-1}}\circ J$.

(2°) 若 $X\in L(G)$，则 $J_*X\in R(G)$（右不变向量场的全体）．且 $J_*:L(G)\to R(G)$ 是同构映射．

7．设 $Q=\{a+bi+cj+dk|a,b,c,d\in R,i^2=j^2=k^2=-1,ij=-ji=k,jk=-kj=i,\ ki=-ik=j\}$ 是四元广域．

如果 $u=a_1+b_1i+c_1j+d_1k$，$v=a_2+b_2i+c_2j+d_2k$.

$|u|^2=a_1^2+b_1^2+c_1^2+d_1^2$，$|v|^2=a_2^2+b_2^2+c_2^2+d_2^2$.

证明 (1°) $|u\cdot v|=|u|\cdot|v|$.

(2°) S^3 是一个 C^∞ Lie 群．

8．对 R^n、S^1、$S^1\times R^1$、$S^1\times S^1$ 具体讨论它们的左不变向量场以及它们相应的单参数群和左陪集，并画出示意图．

9．设 A 是 n 阶复矩阵，定义 n 阶复矩阵

$$\exp A=e^A=I+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A^n}{n!}.$$

(1°) 证明上式右边级数是一致收敛的，且**指数映射** $A\to\exp A=e^A$ 是解析映射．

(2°) $e^{B^{-1}AB}=B^{-1}e^AB$.

(3°) $\det(e^A)=e^{\mathrm{Tr}A}\neq 0$,这里 $A=(a_{ij})$, $\mathrm{Tr}\,A=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$ (A 的迹)。因而,$e^A\in GL(n,C)$。如果 A 是 n 阶实矩阵,则 $\det e^A>0$。

(4°) 如果 $AB=BA$,则 $e^{A+B}=e^A\cdot e^B(=e^B\cdot e^A)$。

(5°) 设 $A=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$,证明:$AB\neq BA$, $e^{A+B}\neq e^A\cdot e^B$。

(6°) $e^0=I$, $e^{-A}=(e^A)^{-1}$(因而 $\det e^A\neq 0$)。

(7°) 设 $U(t)=\exp(tA)=e^{tA}$ (t 为实数),则

$$\frac{dU(t)}{dt}=U(t)\cdot A\ \ (=A\cdot U(t)).$$

(8°) 如果 $\bar{A}'=-A$,则 $e^A\in U(n)$。

10. (1°) 证明 $O(n)$ 的维数为 $\frac{n(n-1)}{2}$。

(2°) 将 $O(n)$ 视作 $GL(n,R)$ 的 C^∞ Lie 子群,而 $T_I(O(n))$ 视作 $T_I(GL(n,R))$ 的子空间,证明:$T_I(O(n))=\{A\,|\,A'=-A\}$。

11. 在定理 7 中,证明 $\mathrm{rank}\,x=1$。

§ 5 张量和外微分形式

5.1 张量和张量空间 $T_p^{r,s}(M)$

1. 协变切向量(或余切向量)

设 $T_p^*(M)=\{\theta\,|\,\theta: T_p(M)\to R$ 是线性函数$\}$。如果 $\theta,\eta\in T_p^*(M)$, $\lambda\in R$,我们定义

$$(\theta+\eta)(X)=\theta(X)+\eta(X),$$

$$(\lambda\theta)(X)=\lambda\cdot\theta(X),\ X\in T_p(M).$$

则显然,$\theta+\eta$, $\lambda\theta\in T_p^*(M)$,并且 $T_p^*(M)$ 在上述加法和数乘下形成一个 R 上的向量空间。此外,有

引理 1 设$\{x^i\}$是 P 的局部坐标系,令 $dx^i\in T_p^*(M)$,且

$$dx^i\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)=\delta^i_j=\begin{cases}1, i=j,\\0, i\neq j.\end{cases}$$

则$\{dx^i|i=1,\cdots,n\}$是$T^*_p(M)$的一个基，因而$T^*_p(M)$是n维向量空间。

证明 如果$\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i dx^i=0$，则

$$0=0\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)=\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i dx^i\right)\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\delta^i_j=\lambda_j, j=1,\cdots,n,$$

所以，$\{dx^i\}$是线性无关的。

此外，对于任何$\theta\in T^*_p(M)$，则

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\theta\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)dx^i\right)\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)=\sum_{i=1}^{n}\theta\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)\delta^i_j=\theta\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right),$$

$$j=1,\cdots,n.$$

于是，

$$\theta=\sum_{i=1}^{n}\theta\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)dx^i.$$

这就证明了$\{dx^i|i=1,\cdots,n\}$是$T^*_p(M)$的基。 #

定义 1 $T^*_p(M)$称为$T_p(M)$的**对偶空间**，$\{dx^i\}$称为$\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\right\}$的**对偶基**。$T^*_p(M)$中的$\theta$称为$p$点处的**协变切向量**。

2. 对偶基的变换

设有两个局部坐标系：

$$(U_\alpha,\varphi_\alpha),\{x^i\};$$
$$(U_\beta,\varphi_\beta),\{y^i\}.$$

于是在$U_\alpha\cap U_\beta$中，

$$\frac{\partial}{\partial y^i}=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial x^j}{\partial y^i}\frac{\partial}{\partial x^j},$$

如果令

$$dy^i=\sum_{j=1}^{n}\lambda^i_j dx^j,$$

则

$$\delta^i_k=dy^i\left(\frac{\partial}{\partial y^k}\right)=\left(\sum_{j=1}^{n}\lambda^i_j dx^j\right)\left(\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial x^l}{\partial y^k}\frac{\partial}{\partial x^l}\right)=\sum_{j,l=1}^{n}\lambda^i_j\frac{\partial x^l}{\partial y^k}\delta^j_l$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\lambda^i_j\frac{\partial x^j}{\partial y^k}.$$

因此，(λ^i_j)为$\left(\frac{\partial x^j}{\partial y^k}\right)$的逆矩阵，于是有

$$dy^i=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial y^i}{\partial x^j}dx^j,$$

即

$$\begin{pmatrix} dy^1\\ \vdots\\ dy^n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial y^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial y^1}{\partial x^n}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{\partial y^n}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial y^n}{\partial x^n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} dx^1\\ \vdots\\ dx^n\end{pmatrix}. \tag{1}$$

3. 协变切向量的坐标变换

设$\theta\in T^*_p(M)$，则

$$\sum_{j=1}^{n}\bar{\theta}_j dy^j=\theta=\sum_{i=1}^{n}\theta_i dx^i=\sum_{i=1}^{n}\theta_i\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial x^i}{\partial y^j}dy^j\right)$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial x^i}{\partial y^j}\theta_i\right)dy^j,$$

$$\theta_i=\theta\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right),\quad \bar{\theta}_j=\theta_p\left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right).$$

$$\bar{\theta}_j=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial x^i}{\partial y^j}\theta_i,$$

即

$$\begin{pmatrix}\bar{\theta}_1\\ \vdots\\ \bar{\theta}_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial x^1}{\partial y^1} & \cdots & \frac{\partial x^n}{\partial y^1}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{\partial x^1}{\partial y^n} & \cdots & \frac{\partial x^n}{\partial y^n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\theta_1\\ \vdots\\ \theta_n\end{pmatrix} \tag{2}$$

其中$\{\theta_i\}$和$\{\bar{\theta}_i\}$分别称为协变切向量θ关于局部坐标系$\{x^i\}$和$\{y^i\}$的**支量**。由此，可给出古典的协变切向量的定义（仿照第二章§4.1中古典切向量的定义）。

4. 张量

定义 2 设映射

$$\theta:\overbrace{T_p^*(M)\times\cdots\times T_p^*(M)}^{r\text{个}}\times\overbrace{T_p(M)\times\cdots\times T_p(M)}^{s\text{个}}\to R$$

是偏线性的，即满足条件：

$$\begin{aligned}&\theta(W_1,\cdots,W_r;X_1,\cdots,X_{i-1},\lambda X_i+\mu Y_i,X_{i+1},\cdots,X_s)\\ &\quad=\lambda\theta(W_1,\cdots,W_r;X_1,\cdots,X_i,\cdots,X_s)\\ &\quad\quad+\mu\theta(W_1,\cdots,W_r;X_1,\cdots,Y_i,\cdots,X_s),\\ &\theta(W_1,\cdots,W_{j-1},\lambda W_j+\mu U_j,W_{j+1},\cdots,W_r;X_1,\cdots,X_s)\\ &\quad=\lambda\theta(W_1,\cdots,W_j,\cdots,W_r;X_1,\cdots,X_s)\\ &\quad\quad+\mu\theta(W_1,\cdots,U_j,\cdots,W_r;X_1,\cdots,X_s)\end{aligned}$$

$(\lambda,\mu\in R;X_i,Y_i\in T_p(M),W_j,U_j\in T_p^*(M),i=1,\cdots,s,$
$j=1,\cdots,r)$。

则称θ为$T_p(M)$上（或p点处）的(r,s)**型张量**。r是它的**逆变阶数**，s是它的**协变阶数**。特别，称$(r,0)$型张量为r阶**逆变张量**，称$(0,s)$型张量为s阶**协变张量**。当$r>0,s>0$时，(r,s)型张量称为**混合张量**。

(1,0) 型张量就是逆变切向量，(0,1) 型张量就是协变切向量.

我们将 $T_p(M)$ 上的所有 (r,s) 型张量的全体记为 $T_p^{r,s}(M)$. 容易看出，$T_p^{1,0}(M)\approx T_p(M)$（同构．参看习题 3)，$T_p^{0,1}(M)=T_p^*(M)$．我们还约定 $T_p^{0,0}(M)=R$.

从线性代数内容可以知道，张量实际上是向量空间上的线性函数和双线性函数的推广，前者是(0,1)型张量，后者是(0,2)型张量.

注 对于混合张量而言，若只称它为 (r,s) 型其实是不很确切的．例如，(2,1)型的张量可以是以下三者之一：

$$\theta: T_p^*(M)\times T_p^*(M)\times T_p(M)\to R,$$

$$\theta: T_p^*(M)\times T_p(M)\times T_p^*(M)\to R,$$

$$\theta: T_p(M)\times T_p^*(M)\times T_p^*(M)\to R.$$

因为一般说来，对于形如

$$\theta: \overbrace{T_p^*(M)\times\cdots\times T_p^*(M)}^{r\ 个}\times\overbrace{T_p(M)\times\cdots\times T_p(M)}^{s\ 个}\to R$$

的张量能成立的事实，在其它 (r,s) 型张量的情形也成立．因此，不必仔细划分，单就型式而论就够了.

但是，在必须标明时，可用$[\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_{r+s}]$来表示，这时

$$\theta: V_1\times\cdots\times V_{r+s}\to R^1,$$

规定

$$V_i=\begin{cases}T_p^*(M), \varepsilon_i=+1,\\ T_p(M), \varepsilon_i=-1.\end{cases}$$

如：$\theta: T_p^*(M)\times T_p(M)\times T_p^*(M)\to R^1$ 中的 θ 是$[1,-1,1]$型张量.

5．张量的支量及其变换公式

设$\{x^i\}$是 p 的局部坐标系，令

$$\theta\left(dx^{i_1},\cdots,dx^{i_r};\frac{\partial}{\partial x^{j_1}},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^{j_s}}\right)=\theta^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s},$$

n^{r+s} 个数$(\theta^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s})$就称为张量 θ 关于局部坐标系$\{x^i\}$的**支量**.

如果$\{y^i\}$是 p 的另一坐标系,$(\bar\theta^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s})$是 θ 关于$\{y^i\}$的支量，于是有**支量变换公式**:

$$\bar\theta^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}=\theta\left(dy^{i_1},\cdots,dy^{i_r};\frac{\partial}{\partial y^{j_1}},\cdots,\frac{\partial}{\partial y^{j_s}}\right)$$

$$=\theta\left(\sum_{k_1=1}^{n}\frac{\partial y^{i_1}}{\partial x^{k_1}}dx^{k_1},\cdots,\sum_{k_r=1}^{n}\frac{\partial y^{i_r}}{\partial x^{k_r}}dx^{k_r};\right.$$

$$\left.\sum_{l_1=1}^{n}\frac{\partial x^{l_1}}{\partial y^{j_1}}\frac{\partial}{\partial x^{l_1}},\cdots,\sum_{l_s=1}^{n}\frac{\partial x^{l_s}}{\partial y^{j_s}}\frac{\partial}{\partial x^{l_s}}\right)$$

$$=\sum_{\substack{k_1,\cdots,k_r=1\\ l_1,\cdots,l_s=1}}^{n}\frac{\partial y^{i_1}}{\partial x^{k_1}}\cdots\frac{\partial y^{i_r}}{\partial x^{k_r}}\frac{\partial x^{l_1}}{\partial y^{j_1}}\cdots\frac{\partial x^{l_s}}{\partial y^{j_s}}\theta^{k_1\cdots k_r}_{l_1\cdots l_s}.\quad(3)$$

回想起逆变切向量和协变切向量的支量变换公式恰是这公式的两个特殊情形. 上述变换公式称为是 r 次同步 s 次逆步的.

类似逆变切向量和协变切向量的情形，可以给出古典张量的定义.

6. 张量空间 $T_p^{r,s}(M)$

设 $\theta,\eta\in T_p^{r,s}(M)$, $\lambda\in R$, 我们定 义 $\theta+\eta,\lambda\theta\in T_p^{r,s}(M)$ 如下:

$$(\theta+\eta)(W_1,\cdots,W_r;X_1,\cdots,X_s)=\theta(W_1,\cdots,W_r;X_1,\cdots,X_s)+\eta(W_1,\cdots,W_r;X_1,\cdots,X_s),$$

$$(\lambda\theta)(W_1,\cdots,W_r;X_1,\cdots,X_s)=\lambda\theta(W_1,\cdots,W_r;X_1,\cdots,X_s)$$

$$(W_j\in T_p^*(M),X_i\in T_p(M)).$$

则 $T_p^{r,s}(M)$在上述加法和数乘下形成一个向量 空间， 称为p 点处的张量空间.

容易验证 $\theta+\eta$ 和 $\lambda\theta$ 关于局部坐标系 $\{x^i\}$ 的支量是 $(\theta_{j_1\cdots j_s}^{i_1\cdots i_r}+\eta_{j_1\cdots j_s}^{i_1\cdots i_r})$ 和 $(\lambda\theta_{j_1\cdots j_s}^{i_1\cdots i_r})$。

7. 张量积 $\otimes$

为简单起见，只对协变张量定义张量积，而混合张量的情形是完全类似的。

定义 3 设 $\theta\in T_p^{0,r}(M)$，$\eta\in T_p^{0,s}(M)$，我们定义**张量积**

$$\otimes: T_p^{0,r}(M)\times T_p^{0,s}(M)\to T_p^{0,r+s}(M),$$

$$(\theta,\eta)\to\theta\otimes\eta$$

$$(\theta\otimes\eta)(X_1,\cdots,X_{r+s})=\theta(X_1,\cdots,X_r)\cdot\eta(X_{r+1},\cdots,X_{r+s})$$

$$(X_i\in T_p(M)).$$

显然，$\theta\otimes\eta\in T_p^{0,r+s}(M)$，并且 $\theta\otimes\eta$ 的支量为

$$(\theta\otimes\eta)_{j_1\cdots j_{r+s}}=\theta_{j_1\cdots j_r}\cdot\eta_{j_{r+1}\cdots j_{r+s}}.$$

从定义立即可以证明以下简单性质：

引理 2 设 $\theta,\theta_1,\theta_2\in T_p^{0,r}(M)$，$\eta,\eta_1,\eta_2\in T_p^{0,s}(M)$，$\lambda\in R$，则

$$\left.\begin{aligned}&(\theta_1+\theta_2)\otimes\eta=\theta_1\otimes\eta+\theta_2\otimes\eta.\\&\theta\otimes(\eta_1+\eta_2)=\theta\otimes\eta_1+\theta\otimes\eta_2.\end{aligned}\right\}\ (\text{分配律})$$

$$\left.\begin{aligned}&(\lambda\theta)\otimes\eta=\theta\otimes(\lambda\eta)=\lambda(\theta\otimes\eta).\\&(\theta\otimes\eta)\otimes\zeta=\theta\otimes(\eta\otimes\zeta).\end{aligned}\right\}\ (\text{结合律})$$

但是一般来说，$\theta\otimes\eta\neq\eta\otimes\theta$（留作习题）。

定义 4 弱性直和（有限和）$T_p=\sum\limits_{r,s\geqslant 0}T_p^{r,s}(M)$，在上述加法和数乘下自然扩张成一个向量空间，而它在加法和张量积 $\otimes$ 下形成一个环（不可交换），于是，$\left\{T_p=\sum\limits_{r,s\geqslant 0}T_p^{r,s}(M),\text{数乘},+,\otimes\right\}$ 形成一个实数域 R 上的代数，称为**张量代数**。而 $\left\{\sum\limits_{s\geqslant 0}T_p^{0,s}(M),\right.$

数乘，+，$\otimes\}$形成张量代数的一个子代数。

注 $(\theta\otimes\eta)\otimes\zeta$ 和 $\theta\otimes(\eta\otimes\zeta)$ 两者简单地由 $\theta\otimes\eta\otimes\zeta$ 表示。类似地，$\theta_1\otimes\cdots\otimes\theta_s$ 与张量积的先后次序无关。

定理 1 设$\{x^i\}$是 p 的局部坐标系，则

$$\{dx^{i_1}\otimes\cdots\otimes dx^{i_s}\,|\,1\leqslant i_1,\cdots,i_s\leqslant n\}$$

是 $T_p^{0,s}(M)$的一个基，因此 $T_p^{0,s}(M)$的维数是 n^s。

证明 如果 $\sum\limits_{i_1,\cdots,i_s=1}^{n}\lambda_{i_1\cdots i_s}dx^{i_1}\otimes\cdots\otimes dx^{i_s}=0$。

则

$$\begin{aligned}
0&=0\left(\frac{\partial}{\partial x^{j_1}},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^{j_s}}\right)\\
&=\left(\sum_{i_1,\cdots,i_s=1}^{n}\lambda_{i_1\cdots i_s}dx^{i_1}\otimes\cdots\otimes dx^{i_s}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x^{j_1}},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^{j_s}}\right)\\
&=\sum_{i_1,\cdots,i_s=1}^{n}\lambda_{i_1\cdots i_s}dx^{i_1}\left(\frac{\partial}{\partial x^{j_1}}\right)\cdots dx^{i_s}\left(\frac{\partial}{\partial x^{j_s}}\right)\\
&=\sum_{i_1,\cdots,i_s=1}^{n}\lambda_{i_1\cdots i_s}\delta_{j_1}^{i_1}\cdots\delta_{j_s}^{i_s}=\lambda_{j_1\cdots j_s}
\end{aligned}$$

$$(j_1,\cdots,j_s=1,\cdots,n)。$$

这就证明了$\{dx^{i_1}\otimes\cdots\otimes dx^{i_s}\,|\,1\leqslant i_1,\cdots,i_s\leqslant n\}$是线性无关的。

对于任何 $\theta\in T_p^{0,s}(M)$，则 $\theta=\sum\limits_{i_1,\cdots,i_s=1}^{n}\theta_{i_1\cdots i_s}dx^{i_1}\otimes\cdots\otimes dx^{i_s}$。

事实上，这是因为$\left(\sum\limits_{i_1,\cdots,i_s=1}^{n}\theta_{i_1\cdots i_s}dx^{i_1}\otimes\cdots\otimes dx^{i_s}\right)$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^{j_1}},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^{j_s}}\right)=\sum_{i_1,\cdots,i_s=1}^{n}\theta_{i_1\cdots i_s}\delta_{j_1}^{i_1}\cdots\delta_{j_s}^{i_s}=\theta_{j_1\cdots j_s}.$$

$$=\theta\left(\frac{\partial}{\partial x^{j_1}},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^{j_s}}\right).$$

综合上述可知，$\{dx^{i_1}\otimes\cdots\otimes dx^{i_s}\mid 1\leqslant i_1,\cdots,i_s\leqslant n\}$是$T_p^{0,s}(M)$的一个基。 #

注 类似地，可以证明$\left\{\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\otimes\cdots\otimes\frac{\partial}{\partial x^{i_r}}\otimes dx^{j_1}\otimes\cdots\otimes dx^{j_s}\,\middle|\,1\leqslant {}^{i_1,\cdots,i_r}_{j_1,\cdots,j_s}\leqslant n\right\}$是$T_p^{r,s}(M)$的一个基，因此，$T_p^{r,s}(M)$是$n^{r+s}$维的向量空间，关于这个基，$(r,s)$型张量$\theta\in T_p^{r,s}(M)$可表示为

$$\theta=\sum_{\substack{i_1,\cdots,i_r=1\\ j_1,\cdots,j_s=1}}^{n}\theta^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\otimes\cdots\otimes\frac{\partial}{\partial x^{i_r}}\otimes dx^{j_1}\otimes\cdots\otimes dx^{j_s}.$$

8．C^∞张量场

定义 5 设$(M,\mathscr{D})$是n维C^∞流形，$A\subset M$，所谓在集合A上的(r,s)型张量场θ是一个映射，它对每一点$p\in A$，对应着唯一的一个$\theta_p\in T_p^{r,s}(M)$。A称为这张量场的定义域。

以下我们总假定A是M的开集(特殊情形$A=M$)。如果对于每个点$p\in A$，都有一个p的局部坐标系(U,φ)，$\{x^i\}(U\subset A)$，使得

$$\theta=\sum_{\substack{i_1,\cdots,i_r=1\\ j_1,\cdots,j_s=1}}^{n}\theta^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\otimes\cdots\otimes\frac{\partial}{\partial x^{i_r}}\otimes dx^{j_1}\otimes\cdots\otimes dx^{j_s}$$

中的$\theta^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}$是$U$上的$C^r$函数，则称$\theta$是$C^r$的张量场。特别当$r=0$时，它是连续张量场，当$r=\infty$时，它是$C^\infty$张量场。由(3)式可看出，上述定义与$p$的局部坐标系的选取无关。

类似于第二章§4.2定理1，我们有

定理 2 设$(M,\mathscr{D})$是n维C^∞流形，则张量场θ是C^∞的

$\Longleftrightarrow$对 M 上的任何 C^∞ 的协变切向量场 $W_1,\cdots,W_r$ 和 C^∞ 的逆变切向量场 $X_1,\cdots,X_s$,

$$\theta(W_1,\cdots,W_r;X_1,\cdots,X_s)$$

是 M 上的 C^∞ 函数.

证明 参看第二章§4.2 定理1的证明方法(留作习题). #

定义 6 设 M 是 C^∞ 流形, $\mathscr{X}(M)$ 是 M 上的 C^∞ 向量场的全体,如果映射

$$\theta:\overbrace{\mathscr{X}(M)\times\cdots\times\mathscr{X}(M)}^{s\text{ 个}}\to C^\infty(M)$$

是偏线性的,即满足条件:

$$\begin{aligned}&\theta(X_1,\cdots,X_{i-1},fX_i+gY_i,X_{i+1},\cdots,X_s)\\&=f\cdot\theta(X_1,\cdots,X_i,\cdots,X_s)+g\cdot\theta(X_1,\cdots,Y_i,\cdots,X_s)\\&\qquad(f,g\in C^\infty(M),X_i,Y_i\in\mathscr{X}(M),i=1,\cdots,s)\end{aligned}$$

则称 θ 为$(0,s)$型的场张量.

定理 3 (张量场=场张量) 设M是 C^∞ 流形,则 M 上的一个 C^∞ 的$(0,s)$型张量场 θ 可以视作为$(0,s)$的场张量. 反之,一个$(0,s)$型的场张量 θ 也可视作为 M 上的 C^∞ 的$(0,s)$型张量场.

证明 给了一个$(0,s)$型的 C^∞ 张量场 θ,

$$\theta_x:\overbrace{T_x(M)\times\cdots\times T_x(M)}^{s\text{ 个}}\to R$$

是一个偏线性函数,则

$$(X_1,\cdots,X_s)\to(\theta(X_1,\cdots,X_s))_x=\theta_x(X_{1x},\cdots,X_{sx})$$

是

$$\overbrace{\mathscr{X}(M)\times\cdots\times\mathscr{X}(M)}^{s\text{ 个}}\to C^\infty(M)$$

的偏线性映射，即是$(0,s)$型场张量。

相反地，如果

$$\theta:\overbrace{\mathscr{X}(M)\times\cdots\times\mathscr{X}(M)}^{s\text{ 个}}\to C^\infty(M)$$

是$(0,s)$型场张量。证明的本质的一点是函数$\theta(X_1,\cdots,X_s)$在x的值仅依赖于X_i在x的值，这就推出了θ在每个点x处诱导一个

$$\overbrace{T_x(M)\times\cdots\times T_x(M)}^{s\text{ 个}}\to R$$

的偏线性函数。为此，我们先证明以下

引理 3 如果在x的邻域U中$X_i=Y_i(i=1,\cdots,s)$，则有

$$\theta(X_1,\cdots,X_s)=\theta(Y_1,\cdots,Y_s)(\text{在 } U \text{ 中})。$$

引理 3 证明 显然，只须证明如果在U中$X_1=0$，则必有$\theta(X_1,\cdots,X_s)=0$（在U中）。对于任何$y\in U$，作M上的C^∞函数f，使得$f(y)=0$和$f=1$（在U外）（留作习题）。则$X_1=fX_1$（在M上）和$\theta(X_1,\cdots,X_s)=\theta(fX_1,\cdots,X_s)=f\theta(X_1,\cdots,X_s)$，这就推出了

$$\theta(X_1,\cdots,X_s)|_y=0。\qquad \#$$

为了完成定理 3 的证明，我们只须证明如果X_1在点x为 0，则必有$\theta(X_1,\cdots,X_s)|_x=0$。设$(U,\varphi)$，$\{x^i\}$是$x$的局部坐标系，在这局部坐标系中$X_1=\sum_{i=1}^n f^i\frac{\partial}{\partial x^i}$。我们可以作$M$上的$C^\infty$向量场$Y_i$和$C^\infty$函数$g^i$，使得在$x$的邻域$U_1\subset U$中，$Y_i=\frac{\partial}{\partial x^i}$和$g^i=f^i(i=1,\cdots,n)$。则$X_1=\sum_{i=1}^n g^iY_i$（在$U_1$中）。由引理 3，及$g^i(x)=f^i(x)=0(i=1,\cdots,n)$推出

$$\theta(X_1,\cdots,X_s)|_x=\theta\left(\sum_{i=1}^{n}g^iY_i,X_2,\cdots,X_s\right)\bigg|_x$$

$$=\sum_{i=1}^{n}g^i(x)\theta(Y_i,X_2,\cdots,X_s)\bigg|_x=0. \qquad \#$$

注 定理 3 和习题 12 给出了构造 C^∞ 张量场的一种具体方法，在第二章 § 5.2 和 § 8 中我们将给出具体的重要的例子。

9. 由 C^∞ 映射的微分 F_{*p} 而引起的张量间的映射

定理 4 设 M_1 和 M_2 分别是 m 维和 n 维 C^∞ 流形，$F: M_1\to M_2$ 是 C^∞ 映射，$F_{*p}: T_p(M_1)\to T_{F(p)}(M_2)$ 是 F 的微分，则由

$$F_p^*\theta(X_1,\cdots,X_s)=\theta(F_{*p}X_1,\cdots,F_{*p}X_s)$$
$$(\theta\in T^{0,s}_{F(p)}(M_2),X_i\in T_p(M_1),i=1,\cdots,s)$$

定义的映射（显然 $F_p^*\theta\in T_p^{0,s}(M_1)$）

$$F_p^*: T^{0,s}_{F(p)}(M_2)\to T_p^{0,s}(M_1),\theta\to\eta=F_p^*\theta$$

满足：

(1°) F_p^* 是线性映射。

(2°) $F_p^*(\theta_1\otimes\theta_2)=F_p^*\theta_1\otimes F_p^*\theta_2$，$\theta_1\in T^{0,r}_{F(p)}(M_2)$，$\theta_2\in T^{0,s}_{F(p)}(M_2)$。

(3°) 如果 $\{x^1,\cdots,x^m\}$ 和 $\{y^1,\cdots,y^n\}$ 分别是 p 点和 $F(p)$ 点的局部坐标系，则

$$F_p^*dy^j=\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial y^j}{\partial x^i}\right)_p dx^i\ (j=1,\cdots,n)$$

$$\begin{pmatrix}F_p^*dy^1\\ \vdots\\ F_p^*dy^n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial y^1}{\partial x^1}\cdots\frac{\partial y^1}{\partial x^m}\\ \cdots\ \cdots\ \cdots\\ \frac{\partial y^n}{\partial x^1}\cdots\frac{\partial y^n}{\partial x^m}\end{pmatrix}_p\begin{pmatrix}dx^1\\ \vdots\\ dx^m\end{pmatrix}.$$

此外，有 $F_p^*\theta=\sum\limits_{i_1,\cdots,i_s=1}^{m}\left(\sum\limits_{j_1,\cdots,j_s=1}^{n}\frac{\partial y^{j_1}}{\partial x^{i_1}}\cdots\frac{\partial y^{j_s}}{\partial x^{i_s}}\theta_{j_1\cdots j_s}\right)_p dx^{i_1}$

$\otimes\cdots\otimes dx^{i_s}$

和 $\eta_{i_1,\cdots,i_s}=\sum_{j_1,\cdots,j_s=1}^{n}\left(\frac{\partial y^{j_1}}{\partial x^{i_1}}\right)_p\cdots\left(\frac{\partial y^{j_s}}{\partial x^{i_s}}\right)_p\theta_{j_1\cdots j_s}$.

证明 (1°) 从定义立即得到（留作习题）.

(2°) $F_p^*(\theta_1\otimes\theta_2)(X_1,\cdots,X_{r+s})=(\theta_1\otimes\theta_2)(F_{*p}X_1,\cdots,F_{*p}X_{r+s})=\theta_1(F_{*p}X_1,\cdots,F_{*p}X_r)\cdot\theta_2(F_{*p}X_{r+1},\cdots,F_{*p}X_{r+s})=F_p^*\theta_1(X_1,\cdots,X_r)\cdot F_p^*\theta_2(X_{r+1},\cdots,X_{r+s})=(F_p^*\theta_1\otimes F_p^*\theta_2)(X_1,\cdots,X_{r+s}),X_i\in T_p(M_1),i=1,\cdots,r+s$.

(3°) 由 $F_p^*dy^j\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)=dy^j\left(F_{*p}\frac{\partial}{\partial x^i}\right)$

$$=dy^j\left(\sum_{l=1}^{n}\left(\frac{\partial y^l}{\partial x^i}\right)_p\frac{\partial}{\partial y^l}\right)=\sum_{l=1}^{n}\left(\frac{\partial y^l}{\partial x^i}\right)_p\delta_l^j=\left(\frac{\partial y^j}{\partial x^i}\right)_p,$$

推出

$$F_p^*dy^j=\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial y^j}{\partial x^i}\right)_p dx^i.$$

此外，有

$$F_p^*\theta=F_p^*\left(\sum_{j_1,\cdots,j_s=1}^{n}\theta_{j_1\cdots j_s}dy^{j_1}\otimes\cdots\otimes dy^{j_s}\right)$$

$$=\sum_{j_1,\cdots,j_s=1}^{n}\theta_{j_1\cdots j_s}(F_p^*dy^{j_1}\otimes\cdots\otimes F_p^*dy^{j_s})$$

$$=\sum_{j_1,\cdots,j_s=1}^{n}\theta_{j_1\cdots j_s}\left(\sum_{i_1=1}^{m}\frac{\partial y^{j_1}}{\partial x^{i_1}}dx^{i_1}\right)_p\otimes\cdots\otimes\left(\sum_{i_s=1}^{m}\frac{\partial y^{j_s}}{\partial x^{i_s}}dx^{i_s}\right)_p$$

$$=\sum_{i_1,\cdots,i_s=1}^{m}\left(\sum_{j_1,\cdots,j_s=1}^{n}\frac{\partial y^{j_1}}{\partial x^{i_1}}\cdots\frac{\partial y^{j_s}}{\partial x^{i_s}}\theta_{j_1\cdots j_s}\right)_p dx^{i_1}\otimes\cdots\otimes dx^{i_s},$$

$$\eta_{i_1\cdots i_s}=\sum_{j_1,\cdots,j_s=1}^{n}\left(\frac{\partial y^{j_1}}{\partial x^{i_1}}\right)_p\cdots\left(\frac{\partial y^{j_s}}{\partial x^{i_s}}\right)_p\theta_{j_1\cdots j_s}.\quad\#$$

在第二章§4.2例5中看到，如果 X 是向量场，而 F_*X 未必是向量场。但是，对于协变张量场，与此有本质的不同。我们有

定理 5 设 M_1 和 M_2 分别是 m 维和 n 维 C^∞ 流形，F：$M_1\to M_2$ 是 C^∞ 映射，且 θ 是 M_2 上的 C^∞ 的 s 阶协变张量场，则 $F^*\theta$ $((F^*\theta)_p=F_p^*\theta_{F(p)})$ 是 M_1 上的 C^∞ 的 s 阶协变张量场。

证明 由定理4，在局部坐标系中

$$F^*\theta=\sum_{i_1,\cdots,i_s=1}^{m}\left(\sum_{j_1,\cdots,j_s=1}^{n}\frac{\partial y^{j_1}}{\partial x^{i_1}}\cdots\frac{\partial y^{j_s}}{\partial x^{i_s}}\theta_{j_1\cdots j_s}\right)$$

$$dx^{i_1}\otimes\cdots\otimes dx^{i_s}.$$

因为 $\theta_{j_1\cdots j_s}$ 是 $y^1,\cdots,y^n$ 的 C^∞ 函数，而 y^j 又是 $x^1,\cdots,x^m$ 的 C^∞ 函数，所以

$$\sum_{j_1,\cdots,j_s=1}^{n}\frac{\partial y^{j_1}}{\partial x^{i_1}}\cdots\frac{\partial y^{j_s}}{\partial x^{i_s}}\theta_{j_1\cdots j_s}$$

是 $x^1,\cdots,x^m$ 的 C^∞ 函数，这就推出了 $F^*\theta$ 是 M_1 的 C^∞ 的 s 阶协变张量场。 #

5.1 习 题

1. 验证 $T_p^s(M),T_p^{r,s}(M)$ 在所指的加法和数乘下形成一个向量空间。

2. 证明引理2，并举出 $\theta\otimes\eta\neq\eta\otimes\theta$ 的例子。

3. 设 $T_p^{**}(M)$ 是 $T_p^*(M)$ 的对偶空间，我们定义映射

$$\psi: T_p(M)\to T_p^{**}(M)$$

$$X\to X^{**}=\psi(X),$$

使得 $X^{**}(X^*)=X^*(X),X^*\in T_p^*(M)$。

证明 (1°) X^{**}：$T_p^*(M)\to R$ 是线性映射，即 $X^{**}\in T_p^{**}(M)$。

(2°) ψ 是同构。

(3°) 在 p 的局部坐标系 $\{x^i\}$ 中，

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^{**}(dx^j)=dx^j\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)=\delta_i^j.$$

为了简便起见，在不会混淆的情况下，我们将$\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^{**}$仍记成$\frac{\partial}{\partial x^i}$。

(4°) (r,s) 型张量 θ 可表示为

$$\theta=\sum_{\substack{i_1,\cdots,i_r=1\\ j_1,\cdots,j_s=1}}^{n}\theta^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\otimes\cdots\otimes\frac{\partial}{\partial x^{i_r}}\otimes dx^{j_1}\otimes\cdots\otimes dx^{j_s}.$$

(5°) 利用(4°)中公式证明支量变换公式(3)。

4. 证明(1°)$(\theta+\eta)^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}=\theta^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}+\eta^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}$。

(2°) $(\lambda\theta)^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}=\lambda\theta^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}$。

(3°) $(\theta\otimes\eta)_{j_1\cdots j_{r+s}}=\theta_{j_1\cdots j_r}\cdot\eta_{j_{r+1}\cdots j_{r+s}}(\theta\in T^{0,r}_p(M),\eta\in T^{0,s}_p(M))$.

5. 设 θ 是二阶协变张量，$\{e_i\}$ 和 $\{\bar{e}_i\}$ 是 $T_p(M)$ 的两个基，且 $\bar{e}_i=\sum_{l=1}^{n}c_{il}e_l$，$\theta_{ij}=\theta(e_i,e_j)$，$\bar{\theta}_{ij}=\theta(\bar{e}_i,\bar{e}_j)$，对矩阵 $A=(\theta_{ij})$，$\bar{A}=(\bar{\theta}_{ij})$，$C=(c_{ij})$，证明

$$\bar{A}=CAC'.$$

6. 定义：设 $\theta\in T^{0,s}_p(M)$，如果对任何 $X_1,\cdots,X_s\in T_p(M)$及$(1,\cdots,s)$的置换 π，有

$$\theta(X_{\pi(1)},\cdots,X_{\pi(s)})=\theta(X_1,\cdots,X_s),$$

则称 θ 为 s 阶对称协变张量。证明：

θ 为 s 阶对称协变张量$\Longleftrightarrow\theta_{j_{\pi(1)}\cdots j_{\pi(s)}}=\theta_{j_1\cdots j_s}$。特别当 $s=2$ 时，上述条件为

$$\theta(X_1,X_2)=\theta(X_2,X_1)\quad 或\ \theta_{ij}=\theta_{ji}.$$

7. 证明：$\theta(0,\cdots)=0$.

$0\otimes\theta=0$。

$\theta\otimes 0=0$。

8. 证明定理 2。

9. 设$\overset{\circ}{U}$是 C^∞ 流形M上的开集，对固定点$y\in U$，作M上的 C^∞ 函数 f，使得$f(y)=0$ 和 $f=1$(在U外)。

10. 定理 3 对(r,s)型 C^∞ 张量场结论是否仍正确？

11. 从偏线性映射.

$$\theta: \overbrace{T_p(M)\times\cdots\times T_p(M)}^{s\text{个}}\to T_p(M)$$

自然可以得到一个偏线性映射((1,s)型张量)

$$\bar{\theta}: T_p^*(M)\times\overbrace{T_p(M)\times\cdots\times T_p(M)}^{s\text{个}}\to R.$$

这里，$\bar{\theta}(W;X_1,\cdots,X_s)=W(\theta(X_1,\cdots,X_s))$。证明

(1°) $\bar{\theta}\in T_p^{1,s}(M)$.

(2°) 设$\{e_i\}$和$\{e^i\}$是分别属于$T_p(M)$和$T_p^*(M)$的对偶基，即$e^i(e_j)=\delta_j^i$。则

$$\bar{\theta}(e^i;X_1,\cdots,X_s)=e^i(\theta(X_1,\cdots,X_s))$$

$$\theta(X_1,\cdots,X_s)=\sum_{i=1}^n e^i(\theta(X_1,\cdots,X_s))e_i=\sum_{i=1}^n\bar{\theta}(e^i;X_1,\cdots,X_s)e_i.$$

(3°) 反之，如果已给$\bar{\theta}$，我们令

$$\theta(X_1,\cdots,X_s)=\sum_{i=1}^n\bar{\theta}(e^i;X_1,\cdots,X_s)e_i,$$

可以验证上式与对偶基$\{e_i\}$，$\{e^i\}$选取无关。

(4°) 设θ由$\bar{\theta}$按(3°)中所定义，再由θ按

$$\bar{\bar{\theta}}(W;X_1,\cdots,X_s)=W(\theta(X_1,\cdots,X_s))$$

定义$\bar{\bar{\theta}}$，则$\bar{\bar{\theta}}=\bar{\theta}$。

12. 从偏线性映射

$$\theta: \overbrace{\mathscr{X}(M)\times\cdots\times\mathscr{X}(M)}^{s\text{个}}\to\mathscr{X}(M)$$

自然可以得到一个偏线性映射

$$\bar{\theta}: \mathscr{X}^*(M)\times\overbrace{\mathscr{X}(M)\times\cdots\times\mathscr{X}(M)}^{s\text{个}}\to C^\infty(M)$$

这里$\bar{\theta}(W;X_1,\cdots,X_s)=W(\theta(X_1,\cdots,X_s))$，$W\in\mathscr{X}^*(M)$ (M上C^∞协变向量场的全体)，$X_i\in\mathscr{X}(M)$，$i=1,\cdots,s$。称它为$(1,s)$**型场张量**。

(1°) 是否能将定理 3 推广到C^∞的(r,s)型张量场和

$$\theta: \overbrace{\mathscr{X}(M)\times\cdots\times\mathscr{X}(M)}^{s\text{个}}\to\mathscr{X}(M)$$的情形。

(2°) 用$\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\right\}$和$\{dx^i\}$分别代替$\{e_i\}$和$\{e^i\}$是否可以讨论题 11 中类似的问题。

13．(1°) 证明定理 4 中的(1°)。

(2°) 利用$\eta_{i_1\cdots i_s}=F_p^*\theta\left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^{i_s}}\right)$证明

$$\eta_{i_1\cdots i_s}=\sum_{j_1,\cdots,j_s=1}^{n}\left(\frac{\partial y^{j_1}}{\partial x^{i_1}}\right)_p\cdots\left(\frac{\partial y^{j_s}}{\partial x^{i_s}}\right)_p\theta_{j_1\cdots j_s}.$$

(3°) 设$\theta\in T_p^{r,0}(M_1)$，我们定义

$$F_{*,p}:T_p^{r,0}(M_1)\to T_{F(p)}^{r,0}(M_2)$$

为

$$F_{*,p}\theta(W_1,\cdots,W_r)=\theta(F_p^*W_1,\cdots,F_p^*W_r),W_i\in T_{F(p)}^*(M_2),i=1,\cdots,r.$$

讨论类似于定理 4 中的问题。

(4°) 对于M_1上的C^∞的$(r,0)$型张量场，定理 5 的结论还成立吗？为什么？

(5°) 对(r,s)型的混合张量能讨论定理 4 和定理 5 中的问题吗？为什么？

14．设$(M,\mathscr{D})$是n维C^∞流形，$\mathscr{D}=\{(U,\varphi)\}$，$T^{r,s}(M)=\{\theta_p|\theta_p\in T_p^{r,s}(M)\}$。我们定义投影

$$\pi_1:T^{r,s}(M)\to M,\pi_1(\theta_p)=p.$$

如果(U,φ)，$\{x^i\}$是M上的局部坐标系，$U^*=\pi_1^{-1}(U)$。

命

$$\pi_2: U^*\to R^{n^{r+s}},$$

$$\pi_2(\theta_p)=(\theta^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}).$$

(这里$\theta_p=\sum_{\substack{i_1,\cdots,i_r=1\\ j_1,\cdots,j_s=1}}^{n}\theta^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\otimes\cdots\otimes\frac{\partial}{\partial x^{i_r}}\otimes dx^{j_1}\otimes\cdots\otimes dx^{j_s}$)。

$$\varphi^*:U^*\to R^{n+n^{r+s}},\varphi^*(\theta_p)=(\varphi\circ\pi_1(\theta_p),\pi_2(\theta_p))=(\varphi(p),\pi_2(\theta_p)).$$

(1°) 证明$\{(U^*,\varphi^*)\}$确定了$T^{r,s}(M)$上的一个C^∞微分构造$\mathscr{D}^*$，我们

称$(T^{r,s}(M),\mathscr{D}^*)$为$M$上的$(r,s)$型的张量丛(它是$n+n^{r+s}$维的$C^\infty$流形)。

(2°) 证明M上的C^∞的(r,s)型张量场θ是$M\to T^{r,s}(M)$的C^∞映射。

(3°) 第二章§4.2习题10(3°)能否推广到$T^{r,s}(M)$? 在什么条件下才能推广?

5.2 外微分形式ω

1. 反称张量

定义 1 设M是n维C^∞流形，$\omega\in T_p^{0,s}(M)$，如果对任何$X_i\in T_p(M)(i=1,\cdots,s)$及$(1,\cdots,s)$的任何置换$\pi$满足条件：

$$\omega(X_{\pi(1)},\cdots,X_{\pi(s)})=(-1)^\pi\omega(X_1,\cdots,X_s),$$

其中

$$(-1)^\pi=\begin{cases}1, & \pi\text{ 为偶置换},\\ -1, & \pi\text{ 为奇置换},\end{cases}$$

则称ω为p点处的s阶反称协变张量或s阶外形式。记全体s阶反称协变张量为$\wedge_p^s(M)\subset T_p^{0,s}(M)$，显然，它是$T_p^{0,s}(M)$的一个子向量空间。

引理 1 ω是s阶反称的$\Longleftrightarrow$对$(1,\cdots,s)$的任何置换π，

$$\omega_{i_{\pi(1)}\cdots i_{\pi(s)}}=(-1)^\pi\omega_{i_1\cdots i_s}.$$

证明 $(\Rightarrow)$ $\omega_{i_{\pi(1)}\cdots i_{\pi(s)}}=\omega\left(\frac{\partial}{\partial x^{i_{\pi(1)}}},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^{i_{\pi(s)}}}\right)$

$$=(-1)^\pi\omega\left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^{i_s}}\right)=(-1)^\pi\omega_{i_1\cdots i_s}.$$

$(\Leftarrow)$ $\omega(X_{\pi(1)},\cdots,X_{\pi(s)})$

$$=\omega\left(\sum_{i_{\pi(1)}=1}^n a_{\pi(1)}^{i_{\pi(1)}}\frac{\partial}{\partial x^{i_{\pi(1)}}},\cdots,\sum_{i_{\pi(s)}=1}^n a_{\pi(s)}^{i_{\pi(s)}}\frac{\partial}{\partial x^{i_{\pi(s)}}}\right)$$

$$=\sum_{i_{\pi(1)},\cdots,i_{\pi(s)}=1}^n a_{\pi(1)}^{i_{\pi(1)}}\cdots a_{\pi(s)}^{i_{\pi(s)}}\omega\left(\frac{\partial}{\partial x^{i_{\pi(1)}}},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^{i_{\pi(s)}}}\right)$$

$$= \sum_{i_{\pi(1)},\cdots,i_{\pi(s)}=1}^{n} a_{\pi(1)}^{i_{\pi(1)}}\cdots a_{\pi(s)}^{i_{\pi(s)}}\omega_{i_{\pi(1)}\cdots i_{\pi(s)}}$$

$$=(-1)^{\pi} \sum_{i_{\pi(1)},\cdots,i_{\pi(s)}=1}^{n} a_{\pi(1)}^{i_{\pi(1)}}\cdots a_{\pi(s)}^{i_{\pi(s)}}\omega_{i_1\cdots i_s}$$

$$=(-1)^{\pi} \sum_{i_1,\cdots,i_s=1}^{n} a_1^{i_1}\cdots a_s^{i_s}\omega_{i_1\cdots i_s}$$

$$=(-1)^{\pi}\omega\left(\sum_{i_1=1}^{n} a_1^{i_1}\frac{\partial}{\partial x^{i_1}},\cdots,\sum_{i_s=1}^{n} a_s^{i_s}\frac{\partial}{\partial x^{i_s}}\right)$$

$$=(-1)^{\pi}\omega(X_1,\cdots,X_s). \qquad \#$$

注 (1°) 0阶和1阶协变张量常视为反称的。

(2°) 如果 $X_1,\cdots,X_s$ 中有两个相等，$\omega\in\wedge_p^s(M)$，则

$$\omega(X_1,\cdots,X_s)=0.$$

如果 $i_1,\cdots,i_s$ 中有两个相等，则 $\omega_{i_1\cdots i_s}=0$.

(3°) 如果 $s\geqslant n+1$，$\omega\in\wedge_p^s(M)$，则 $\omega=0$ 或 $\omega_{i_1\cdots i_s}$ 全为0，因此，$\wedge_p^s(M)=\{0\}$（留作习题）。

2. 协变张量的反称化

设 $\theta\in T_p^{0,s}(M)$，映射（反称化）

$$A: T_p^{0,s}(M)\to\wedge_p^s(M),$$
$$\theta\to A(\theta)$$

定义为

$$A(\theta)(X_1,\cdots,X_s)=\frac{1}{s!}\sum_{\pi}(-1)^{\pi}\theta(X_{\pi(1)},\cdots,X_{\pi(s)})$$

（这里求和取遍所有$(1,\cdots,s)$的置换），显然这个公式等价于

$$A(\theta)_{i_1\cdots i_s}=\frac{1}{s!}\sum_{\pi}(-1)^{\pi}\theta_{i_{\pi(1)}\cdots i_{\pi(s)}} \text{（留作习题）}.$$

定理 1 (1°) $A(\theta)\in\wedge_p^s(M)$.

(2°) 映射 A 是线性的.

(3°) $\theta\in\bigwedge_p^s(M)\Longleftrightarrow A(\theta)=\theta$.

(4°) 如果 $\theta\in T_p^s(M)$,则 $A(A(\theta))=A(\theta)$.

证明 (1°) $A(\theta)\in T_p^s(M)$是显然的. 此外,由

$$A(\theta)(X_{\sigma(1)},\cdots,X_{\sigma(s)})=\frac{1}{s!}\sum_{\pi}(-1)^{\pi}\theta(X_{\sigma\pi(1)},\cdots,X_{\sigma\pi(s)})$$

$$=(-1)^{\sigma}\frac{1}{s!}\sum_{\sigma\pi}(-1)^{\sigma\pi}\theta(X_{\sigma\pi(1)},\cdots,X_{\sigma\pi(s)})$$

$$=(-1)^{\sigma}A(\theta)(X_1,\cdots,X_s),$$

推出 $A(\theta)\in\bigwedge_p^s(M)$.

(2°) 显然(从定义证).

(3°) ($\Leftarrow$) 由(1°),$\theta=A(\theta)\in\bigwedge_p^s(M)$.

($\Rightarrow$) 如果 $\theta\in\bigwedge_p^s(M)$,则

$$A(\theta)(X_1,\cdots,X_s)=\frac{1}{s!}\sum_{\pi}(-1)^{\pi}\theta(X_{\pi(1)},\cdots,X_{\pi(s)})$$

$$=\frac{1}{s!}\sum_{\pi}(-1)^{\pi}\cdot(-1)^{\pi}\cdot\theta(X_1,\cdots,X_s)=\theta(X_1,\cdots,X_s),$$

即 $A(\theta)=\theta$.

(4°) 由(1°)知 $A(\theta)\in\bigwedge_p^s(M)$,由(3°)知 $A(A(\theta))=A(\theta)$.

#

3. 外积$\wedge$和 Grassmann 代数

定义 2 设 $\alpha\in\bigwedge_p^r(M)$, $\beta\in\bigwedge_p^s(M)$, 我们定义外积(反称积或 Grassmann 积或楔积)

$$\wedge:\bigwedge_p^r(M)\times\bigwedge_p^s(M)\to\bigwedge_p^{r+s}(M)$$

$$(\alpha,\beta)\to\alpha\wedge\beta=\frac{(r+s)!}{r!s!}A(\alpha\otimes\beta),$$

即

$$(\alpha\wedge\beta)(X_1,\cdots,X_{r+s})=\frac{(r+s)!}{r!s!}A(\alpha\otimes\beta)(X_1,\cdots,X_{r+s})$$

$$=\frac{1}{r!s!}\sum_{\pi}(-1)^{\pi}\alpha\otimes\beta(X_{\pi(1)},\cdots,X_{\pi(r+s)})$$

$$=\frac{1}{r!s!}\sum_{\pi}(-1)^{\pi}\alpha(X_{\pi(1)},\cdots,X_{\pi(r)})$$

$$\cdot\beta(X_{\pi(r+1)},\cdots,X_{\pi(r+s)}) \tag{1}$$

例 1 $r=s=1$,

$$(\alpha\wedge\beta)(X_1,X_2)=\alpha(X_1)\beta(X_2)-\alpha(X_2)\beta(X_1).$$

定理 2 (1°) $\alpha\wedge(\beta_1+\beta_2)=\alpha\wedge\beta_1+\alpha\wedge\beta_2.$

$(\alpha_1+\alpha_2)\wedge\beta=\alpha_1\wedge\beta+\alpha_2\wedge\beta.$

$\alpha\wedge(\lambda\beta)=(\lambda\alpha)\wedge\beta=\lambda(\alpha\wedge\beta)\ (\lambda\in R)$ } 双线性

(2°) $\alpha\wedge\beta=(-1)^{rs}\beta\wedge\alpha\quad(\alpha\in\wedge_p^r(M),\beta\in\wedge_p^s(M))$.

特别当 $r=s=1$ 时,有

$$\alpha\wedge\beta=-\beta\wedge\alpha,$$

$$\alpha\wedge\alpha=0.$$

(3°) $(\alpha\wedge\beta)\wedge\gamma=\alpha\wedge(\beta\wedge\gamma)=\dfrac{(r+s+t)!}{r!s!t!}A(\alpha\otimes\beta\otimes\gamma)$.

$(\alpha\in\wedge_p^r(M),\beta\in\wedge_p^s(M),\gamma\in\wedge_p^t(M).)$

证明 (1°) 由定义立即推出.

(2°) $(\alpha\wedge\beta)(X_1,\cdots,X_{r+s})$

$$=\frac{1}{r!s!}\sum_{\pi}(-1)^{\pi}\alpha(X_{\pi(1)},\cdots,X_{\pi(r)})\cdot\beta(X_{\pi(r+1)},\cdots,X_{\pi(r+s)})$$

$$=\frac{1}{r!s!}\sum_{\pi}(-1)^{\pi}\beta(X_{\pi(r+1)},\cdots,X_{\pi(r+s)})\cdot\alpha(X_{\pi(1)},\cdots,X_{\pi(r)})$$

$$=(-1)^{rs}\frac{1}{r!s!}\sum_{\tau}(-1)^{\tau}\beta(X_{\tau(1)},\cdots,X_{\tau(s)})$$

$$\cdot\alpha(X_{\tau(s+1)},\cdots,X_{\tau(r+s)})$$

$$=(-1)^{rs}(\beta\wedge\alpha)(X_1,\cdots,X_{r+s}),$$

这里

$$(1,\cdots,r+s)\xrightarrow{\pi}(\pi(1),\cdots,\pi(r+s))\xrightarrow{rs\text{个对换}}(\pi(r+1),\cdots,\pi(r+s),\pi(1),\cdots,\pi(r)).$$

（上方以 τ 标记从 $(1,\cdots,r+s)$ 到最终排列的复合映射。）

(3°) 设 G 为 $(1,\cdots,r+s+t)$ 的所有置换的全体，H 为保持 $r+s+1,\cdots,r+s+t$ 不动的置换的全体，则

$$(\alpha\wedge\beta)\wedge\gamma(X_1,\cdots,X_{r+s+t})$$

$$=\frac{1}{(r+s)!t!}\sum_{\pi\in G}(-1)^{\pi}(\alpha\wedge\beta)(X_{\pi(1)},\cdots,$$

$$X_{\pi(r+s)})\cdot\gamma(X_{\pi(r+s+1)},\cdots,X_{\pi(r+s+t)})$$

$$=\frac{1}{(r+s)!t!}\sum_{\pi\in G}(-1)^{\pi}\frac{1}{r!s!}\sum_{\rho\in H}(-1)^{\rho}\alpha(X_{\pi\rho(1)},\cdots,X_{\pi\rho(r)})$$

$$\cdot\beta(X_{\pi\rho(r+1)},\cdots,X_{\pi\rho(r+s)})\cdot\gamma(X_{\pi\rho(r+s+1)},\cdots,X_{\pi\rho(r+s+t)})$$

$$=\frac{1}{(r+s)!r!s!t!}\sum_{\rho\in H}\sum_{\pi\rho\in G}(-1)^{\pi\rho}\alpha(X_{\pi\rho(1)},\cdots,X_{\pi\rho(r)})$$

$$\cdot\beta(X_{\pi\rho(r+1)},\cdots,X_{\pi\rho(r+s)})$$

$$\cdot\gamma(X_{\pi\rho(r+s+1)},\cdots,X_{\pi\rho(r+s+t)})$$

$$=\frac{1}{(r+s)!r!s!t!}\sum_{\rho\in H}(r+s+t)!A(\alpha\otimes\beta\otimes\gamma)(X_1,\cdots,X_{r+s+t})$$

$$=\frac{(r+s+t)!}{r!s!t!}A(\alpha\otimes\beta\otimes\gamma)(X_1,\cdots,X_{r+s+t}).$$

所以

$$(\alpha\wedge\beta)\wedge\gamma=\frac{(r+s+t)!}{r!s!t!}A(\alpha\otimes\beta\otimes\gamma),$$

同理

$$\alpha\wedge(\beta\wedge\gamma)=\frac{(r+s+t)!}{r!s!t!}A(\alpha\otimes\beta\otimes\gamma)$$

这就证明了

$$(\alpha\wedge\beta)\wedge\gamma=\alpha\wedge(\beta\wedge\gamma). \quad \#$$

注 自然 $(\alpha\wedge\beta)\wedge\gamma$ 和 $\alpha\wedge(\beta\wedge\gamma)$ 两者可以简单地记成 $\alpha\wedge\beta\wedge\gamma$. 对于 $\alpha_1\wedge\cdots\wedge\alpha_s$ 可类似地定义，且

$$\alpha_1\wedge\cdots\wedge\alpha_s=\frac{(r_1+\cdots+r_s)!}{r_1!\cdots r_s!}A(\alpha_1\otimes\cdots\otimes\alpha_s)\text{（留作习题）.}$$

定理 3 $\{dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_s}\,|\,1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_s\leqslant n\}$ 是 $\wedge_p^s(M)$ 的一个基，因此 $\wedge_p^s(M)$ 是 C_n^s 维的向量空间.

证明 设 $\omega\in\wedge_p^s(M)\subset T_p^{0,s}(M)$，则

$$\omega=\sum_{i_1,\cdots,i_s=1}^{n}\omega_{i_1\cdots i_s}dx^{i_1}\otimes\cdots\otimes dx^{i_s},$$

所以由定理 1(3°)及上述注，得到

$$\omega=A(\omega)=\sum_{i_1,\cdots,i_s=1}^{n}\omega_{i_1\cdots i_s}A(dx^{i_1}\otimes\cdots\otimes dx^{i_s})$$

$$=\frac{1}{s!}\sum_{i_1,\cdots,i_s=1}^{n}\omega_{i_1\cdots i_s}dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_s}$$

$$=\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_s\leqslant n}\omega_{i_1\cdots i_s}dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_s}.$$

于是 $\{dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_s}\,|\,1\leqslant s\leqslant n, 1\leqslant i_1<\cdots<i_s\leqslant n\}$ 张成空间 $\wedge_p^s(M)$.

如果 $\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_s\leqslant n}\lambda_{i_1\cdots i_s}dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_s}=0$. 则当 $j_1<\cdots<j_s$ 时，有

$$0=\left(\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_s\leqslant n}\lambda_{i_1\cdots i_s}dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_s}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x^{j_1}},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^{j_s}}\right)$$

$$=s!\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_s\leqslant n}\lambda_{i_1\cdots i_s}A(dx^{i_1}\otimes\cdots\otimes dx^{i_s})\left(\frac{\partial}{\partial x^{j_1}},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^{j_s}}\right)$$

$$=\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_s\leqslant n}\lambda_{i_1\cdots i_s}\sum_{\pi}(-1)^{\pi}(dx^{i_1}\otimes\cdots\otimes dx^{i_s})$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^{j_{\pi(1)}}},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^{j_{\pi(s)}}}\right)$$

$$=\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_s\leqslant n}\lambda_{i_1\cdots i_s}(dx^{i_1}\otimes\cdots\otimes dx^{i_s})$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^{j_1}},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^{j_s}}\right)=\lambda_{j_1\cdots j_s},$$

所以$\{dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_s}\mid 1\leqslant i_1<\cdots<i_s\leqslant n\}$是线性无关的. #

定义 3 设$\wedge_p(M)=\wedge_p^0(M)\dotplus\wedge_p^1(M)\dotplus\cdots\dotplus\wedge_p^n(M)$是$\{\wedge_p^s(M)\mid 0\leqslant s\leqslant n\}$的直和,则$\{1;\ dx^i(i=1,\cdots,n);\ dx^{i_1}\wedge dx^{i_2}(1\leqslant i_1<i_2\leqslant n);\cdots;dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n\}$构成了$\wedge_p(M)$的一个基. $\wedge_p(M)$是由1和$\wedge_p^1(M)$生成的$C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^n=2^n$维的向量空间. 这里乘法$\wedge$可以线性开拓到$\wedge_p(M)$上,即要求$\wedge$关于向量加法是分配的. 此乘法又是结合的(形成一个环). 从而$\wedge_p(M)$是一个具有单位元1的代数,称为 Grassmann 代数(或外代数).

例 2 设$\{x^i\}$和$\{y^i\}$是p的两个局部坐标系,则

$$dy^{j_1}\wedge\cdots\wedge dy^{j_s}=\left(\sum_{i_1=1}^{n}\frac{\partial y^{j_1}}{\partial x^{i_1}}dx^{i_1}\right)\wedge\cdots\wedge\left(\sum_{i_s=1}^{n}\frac{\partial y^{j_s}}{\partial x^{i_s}}dx^{i_s}\right)$$

$$=\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_s\leqslant n}\sum_{\pi}(-1)^{\pi}\frac{\partial y^{j_{\pi(1)}}}{\partial x^{i_1}}\cdots\frac{\partial y^{j_{\pi(s)}}}{\partial x^{i_s}}dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_s}$$

$$= \sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_s\leqslant n} \frac{\partial(y^{j_1},\cdots,y^{j_s})}{\partial(x^{i_1},\cdots,x^{i_s})} dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_s}.$$

特别当 $s=n$ 时，有

$$dy^1\wedge\cdots\wedge dy^n=\frac{\partial(y^1,\cdots,y^n)}{\partial(x^1,\cdots,x^n)}dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n.$$

对于 s 阶外形式，我们有

$$\sum_{1\leqslant j_1<\cdots<j_s\leqslant n} \bar{\omega}_{j_1\cdots j_s} dy^{j_1}\wedge\cdots\wedge dy^{j_s}=\omega$$

$$= \sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_s\leqslant n} \omega_{i_1\cdots i_s} dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_s}$$

$$= \sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_s\leqslant n} \omega_{i_1\cdots i_s} \sum_{1\leqslant j_1<\cdots<j_s\leqslant n} \frac{\partial(x^{i_1},\cdots,x^{i_s})}{\partial(y^{j_1},\cdots,y^{j_s})} dy^{j_1}\wedge\cdots\wedge dy^{j_s}$$

$$= \sum_{1\leqslant j_1<\cdots<j_s\leqslant n} \left(\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_s\leqslant n} \omega_{i_1\cdots i_s} \frac{\partial(x^{i_1},\cdots,x^{i_s})}{\partial(y^{j_1},\cdots,y^{j_s})} \right) dy^{j_1}\wedge\cdots\wedge dy^{j_s}.$$

$$\bar{\omega}_{j_1\cdots j_s} = \sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_s\leqslant n} \omega_{i_1\cdots i_s} \frac{\partial(x^{i_1},\cdots,x^{i_s})}{\partial(y^{j_1},\cdots,y^{j_s})}.$$

4. 外微分形式

定义 4 设 $(M,\mathscr{D})$ 是 n 维 C^∞ 流形，U 是 M 中的开集，ω 是 U 上的 s 阶的 C^∞ 反称协变张量场，则称 ω 为 U 上的 s 阶的 C^∞**外微分形式**。当 $s=0$ 时，ω 是 U 上的 C^∞ 函数；当 $s=1$ 时，ω 也称为 C^∞ 的 **Pfaff 形式**。当 $s>n$ 时，$\omega=0$。

在局部坐标系 $\{x^i\}$ 中，

$$\omega = \sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_s\leqslant n} \omega_{i_1\cdots i_s} dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_s}.$$

记 U 上全体 s 阶的 C^∞ 外微分形式为 $\wedge^s(U)$，其直和为

$$\wedge(U)=\wedge^0(U)\dot{+}\wedge^1(U)\dot{+}\cdots\dot{+}\wedge^n(U).$$

如果 $\omega\in\wedge(U)$，则在局部坐标系 $\{x^i\}$ 中，

$$\omega=\omega_0(x^1,\cdots,x^n)+\sum_i \omega_i(x^1,\cdots,x^n)dx^i$$

$$+\sum_{i_1<i_2}\omega_{i_1 i_2}(x^1,\cdots,x^n)dx^{i_1}\wedge dx^{i_2}$$

$$+\cdots+\sum_{i_1<\cdots<i_{n-1}}\omega_{i_1\cdots i_{n-1}}(x^1,\cdots,x^n)dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_{n-1}}$$

$$+\omega_{1\cdots n}(x^1,\cdots,x^n)dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n,$$

其中 $\omega_0, \omega_i, \omega_{i_1 i_2}, \cdots, \omega_{i_1\cdots i_s}, \cdots, \omega_{1\cdots n}$ 都是 $x^1, \cdots, x^n$ 的 C^∞ 函数。

5．外微分 d

定义 5 设 $(M,\mathscr{D})$ 是 n 维 C^∞ 流形，我们定义外微分运算

$$d:\ \wedge^s(M)\to\wedge^{s+1}(M),$$

$$\omega\to d\omega$$

如下：如果

$$s=0,\quad df(X)=Xf,\quad f\in\wedge^0(M),\quad X\in\mathscr{X}(M)$$

如果 $s\geqslant 1$，

$$d\omega(X_1,\cdots,X_{s+1})=\sum_{i=1}^{s+1}(-1)^{i+1}X_i\omega(X_1,\cdots,\hat{X}_i,\cdots,X_{s+1})$$

$$+\sum_{i<j}(-1)^{i+j}\omega([X_i,X_j],X_1,\cdots,\hat{X}_i,\cdots,\hat{X}_j,\cdots,X_{s+1}),$$

其中 $\omega\in\wedge^s(M)$，$X_i\in\mathscr{X}(M)$，$\hat{X}_i$ 表示删去 X_i。显然，上述定义的 d 可以用自然的方法线性地扩张到 $\wedge(M)\to\wedge(M)$。

引理 2 如果 $f\in\wedge^0(M)$, $\omega\in\wedge^s(M)$, 则 $df\in\wedge^1(M)$, $d\omega\in\wedge^{s+1}(M)$.

证明 由

$$df(\varphi_1X_1+\varphi_2X_2)=(\varphi_1X_1+\varphi_2X_2)f=\varphi_1\cdot X_1f+\varphi_2\cdot X_2f$$
$$=\varphi_1\cdot df(X_1)+\varphi_2\cdot df(X_2),$$

$\varphi_1,\varphi_2\in C^\infty(M)$, $X_1,X_2\in\mathscr{X}(M)$, 推出 $df\in\wedge^1(M)$.

如果 $\omega\in\wedge^s(M)$. $d\omega$ 关于加法的偏线性是显然的. 为了证明 $d\omega$ 是反称的, 只须验证

$$d\omega(X_1,\cdots,X_l,X_{l+1},\cdots,X_{s+1})$$
$$=-d\omega(X_1,\cdots,X_{l+1},X_l,\cdots,X_{s+1})$$

因为

$$d\omega(X_1,\cdots,X_l,X_{l+1},\cdots,X_{s+1})$$
$$=\sum_{l+1<i}(-1)^{i+1}X_i\omega(X_1,\cdots,X_l,X_{l+1},\cdots,\hat{X}_i,\cdots,$$
$$X_{s+1})+(-1)^{l+1}X_l\omega(X_1,\cdots,\hat{X}_l,X_{l+1},\cdots,X_{s+1})$$
$$+(-1)^{l+2}X_{l+1}\omega(X_1,\cdots,X_l,\hat{X}_{l+1},\cdots,X_{s+1})$$
$$+\sum_{i<l}(-1)^{i+1}X_i\omega(X_1,\cdots,\hat{X}_i,\cdots,X_l,X_{l+1},\cdots,X_{s+1})$$
$$+\sum_{l+1<i<j}(-1)^{i+j}\omega([X_i,X_j],X_1,\cdots,X_l,X_{l+1},\cdots,$$
$$\hat{X}_i,\cdots,\hat{X}_j,\cdots,X_{s+1})$$
$$+\sum_{j>l+1}(-1)^{l+1+j}\omega([X_{l+1},X_j],X_1,\cdots,$$
$$X_l,\hat{X}_{l+1},\cdots,\hat{X}_j,\cdots,X_{s+1})$$
$$+\sum_{j>l+1}(-1)^{l+j}\omega([X_l,X_j],X_1,\cdots,$$
$$\hat{X}_l,X_{l+1},\cdots,\hat{X}_j,\cdots,X_{s+1})$$

$$+(-1)^{l+l+1}\omega([X_l,X_{l+1}],X_1,\cdots,\hat{X}_l,\hat{X}_{l+1},\cdots,X_{s+1})$$

$$+\sum_{i<l<l+1<j}(-1)^{i+j}\omega([X_i,X_j],X_1,\cdots,$$

$$\hat{X}_i,\cdots,X_l,X_{l+1},\cdots,\hat{X}_j,\cdots,X_{s+1})$$

$$+\sum_{i<l}(-1)^{i+l+1}\omega([X_i,X_{l+1}],\ X_1,\cdots,\hat{X}_i,\cdots,X_l,$$

$$\hat{X}_{l+1},\cdots,X_{s+1})$$

$$+\sum_{i<l}(-1)^{i+l}\omega([X_i,X_l],X_1,\cdots,\hat{X}_i,\cdots,$$

$$\hat{X}_l,X_{l+1},\cdots,X_{s+1})$$

$$+\sum_{i<j<l}(-1)^{i+j}\omega([X_i,X_j],X_1,\cdots,\hat{X}_i,\cdots,\hat{X}_j,\cdots,$$

$$X_l,X_{l+1},\cdots,X_{s+1})$$

所以，如果我们将上式中 X_l 和 X_{l+1} 交换，明显地可以看出，它等于

$$-d\omega(X_1,\cdots,X_{l+1},X_l,\cdots,X_{s+1}).$$

由反称性，剩下的我们仅须证明

$$d\omega(fX_1,X_2,\cdots,X_{s+1})=fd\omega(X_1,\cdots,X_{s+1}).$$

事实上，

$$d\omega(fX_1,X_2,\cdots,X_{s+1})=(fX_1)\omega(\hat{X}_1,X_2,\cdots,X_{s+1})$$

$$+\sum_{i=2}^{s+1}(-1)^{i+1}X_i\omega(fX_1,\cdots,\hat{X}_i,\cdots,X_{s+1})$$

$$+\sum_{j=2}^{s+1}(-1)^{1+j}\omega([fX_1,X_j],\hat{X}_1,X_2,\cdots,\hat{X}_j,\cdots,X_{s+1})$$

$$+\sum_{1<i<j}(-1)^{i+j}\omega([X_i,Y_j],fX_1,\cdots,\hat{X}_i,\cdots,\hat{X}_j,\cdots,X_{s+1})$$

$$= f d\omega(X_1, \cdots, X_{s+1})$$

$$+ \sum_{i=2}^{s+1} (-1)^{i+1} (X_i f) \omega(X_1, \cdots, \hat{X}_i, \cdots, X_{s+1})$$

$$+ \sum_{j=2}^{s+1} (-1)^{1+j} \omega(-(X_j f) X_1, \hat{X}_1, X_2, \cdots, \hat{X}_j, \cdots, X_{s+1})$$

$$= f d\omega(X_1, \cdots, X_{s+1}).$$

以上证明了 $d\omega$ 是$(0, s+1)$型的场张量，由第二章§ 5.1 定理 3，它是$(0, s+1)$型的 C^∞张量场，即 $d\omega \in \wedge^{s+1}(M)$。 #

引理 3 设 $f \in \wedge^0(M)$，$\omega \in \wedge^s(M)$，在局部坐标系(U, φ)，$\{x^i\}$中，

$$\omega = \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_s \leqslant n} \omega_{i_1 \cdots i_s} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_s},$$

则在$\{x^i\}$中

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$$

$$d\omega = \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_s \leqslant n} d\omega_{i_1 \cdots i_s} \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_s}$$

$$= \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_s \leqslant n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \omega_{i_1 \cdots i_s}}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_s}.$$

证明 任何 $p \in U$，选取 p 的邻域 $U_1 \subset U$，使得在 M 上有 C^∞向量场 X_i，$X_i|_{U_1} = \frac{\partial}{\partial x^i}$，$i = 1, \cdots, n$。于是在$U_1$中

$$df\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = df(X_i) = X_i f = \frac{\partial}{\partial x^i} f = \frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^i}$$

$$\left(\text{简记为} \frac{\partial f}{\partial x^i}\right).$$

这就推出了

$$df=\sum_{i=1}^{n}df\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)dx^i=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x^i}dx^i.$$

我们再证第二式．在 U_1 中，由于$\left[\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}\right]=0$，得到

$$d\omega\left(\frac{\partial}{\partial x^{k_1}},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^{k_{s+1}}}\right)=d\omega(X_{k_1},\cdots,X_{k_{s+1}})$$

$$=\sum_{i=1}^{s+1}(-1)^{i+1}X_{k_i}\omega(X_{k_1},\cdots,\hat{X}_{k_i},\cdots,X_{k_{s+1}})$$

$$+\sum_{i<j}(-1)^{i+j}\omega([X_{k_i},X_{k_j}],X_{k_1},\cdots,\hat{X}_{k_i},\cdots,\hat{X}_{k_j},\cdots,X_{k_{s+1}})$$

$$=\sum_{i=1}^{s+1}(-1)^{i+1}\frac{\partial}{\partial x^{k_i}}\,\omega\left(\frac{\partial}{\partial x^{k_1}},\cdots,\widehat{\frac{\partial}{\partial x^{k_i}}},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^{k_{s+1}}}\right)$$

$$+\sum_{i<j}(-1)^{i+j}\omega\left(\left[\frac{\partial}{\partial x^{k_i}},\frac{\partial}{\partial x^{k_j}}\right],\frac{\partial}{\partial x^{k_1}},\cdots,\widehat{\frac{\partial}{\partial x^{k_i}}},\cdots,\right.$$

$$\left.\widehat{\frac{\partial}{\partial x^{k_j}}},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^{k_{s+1}}}\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{s+1}(-1)^{i+1}\frac{\partial\omega_{k_1\cdots\hat{k}_i\cdots k_{s+1}}}{\partial x^{k_i}}.$$

$$\left(\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_s\leqslant n}d\omega_{i_1\cdots i_s}\wedge dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_s}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x^{k_1}},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^{k_{s+1}}}\right)$$

$$=\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_s\leqslant n}\sum_{\pi}(-1)^{\pi}d\omega_{i_1\cdots i_s}\otimes dx^{i_1}\otimes\cdots\otimes dx^{i_s}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^{k_{\pi(1)}}},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^{k_{\pi(s+1)}}}\right)$$

$$=d\omega_{\hat{k}_1k_2\cdots k_{s+1}}\otimes dx^{k_2}\otimes\cdots\otimes dx^{k_{s+1}}\left(\frac{\partial}{\partial x^{k_1}},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^{k_{s+1}}}\right)$$

$$-d\omega_{k_1\hat{k}_2\cdots k_{s+1}}\otimes dx^{k_1}\otimes dx^{k_3}\otimes\cdots\otimes dx^{k_{s+1}}\Big(\frac{\partial}{\partial x^{k_2}},$$

$$\frac{\partial}{\partial x^{k_1}},\ \frac{\partial}{\partial x^{k_3}},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^{k_{s+1}}}\Big)$$

$$+\cdots+(-1)^{s+2}d\omega_{k_1\cdots k_s\hat{k}_{s+1}}\otimes dx^{k_1}\otimes\cdots\otimes dx^{k_s}\Big(\frac{\partial}{\partial x^{k_{s+1}}},$$

$$\frac{\partial}{\partial x^{k_1}},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^{k_s}}\Big)$$

$$=\sum_{i=1}^{s+1}(-1)^{i+1}\frac{\partial\omega_{k_1\cdots\hat{k}_i\cdots k_{s+1}}}{\partial x^{k_i}}=d\omega\Big(\frac{\partial}{\partial x^{k_1}},\cdots,$$

$$\frac{\partial}{\partial x^{k_{s+1}}}\Big)\quad(k_1<\cdots<k_{s+1}).\qquad \#$$

注 从引理 3 的证明可以看出，在不致混淆的情况下，可以直接用$\frac{\partial}{\partial x^i}$运算而不再每次引进整体的$X_i$。

定理 4 (1°) $d(\omega+\eta)=d\omega+d\eta$,

$d(\lambda\omega)=\lambda d\omega\quad(\omega,\eta\in\bigwedge^s(M),\lambda\in R^1)$.

(2°) $d(\omega\wedge\eta)=d\omega\wedge\eta+(-1)^r\omega\wedge d\eta\quad(\omega\in\bigwedge^r(M),\ \eta\in\bigwedge^s(M))$.

(3°) $d^2\omega=d(d\omega)=0\quad(\omega\in\bigwedge^s(M))$.

(4°) 如果 $\omega_1,\cdots,\omega_k$ 是 C^∞的Pfaff 形式，则

$$d(\omega_1\wedge\cdots\wedge\omega_k)=\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i-1}\omega_1\wedge\cdots\wedge d\omega_i\wedge\cdots\wedge\omega_k,$$

特别地，

$$d(df_1\wedge\cdots\wedge df_k)=0.$$

证明 (1°) 从定义 5 立即得到.

(2°) 由引理 3 和(1°)，在局部坐标系$\{x^i\}$中只须证明单项式

$$\omega=fdx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_r},\eta=gdx^{j_1}\wedge\cdots\wedge dx^{j_s}$$

的情形即可.

$r=s=0$，记 $fg=f\wedge g$．$gdf=df\wedge g=g\wedge df$．

$$d(f\wedge g)=d(fg)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial(fg)}{\partial x^i}dx^i=g\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x^i}dx^i$$

$$+f\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial g}{\partial x^i}dx^i$$

$$=df\wedge g+(-1)^0 f\wedge dg.$$

一般情形，

$$\omega\wedge\eta=fg\,dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_r}\wedge dx^{j_1}\wedge\cdots\wedge dx^{j_s}.$$

$$\begin{aligned}d(\omega\wedge\eta)&=d(fg)\wedge dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_r}\wedge dx^{j_1}\wedge\cdots\wedge dx^{j_s}\\&=(gdf+fdg)dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_r}\wedge dx^{j_1}\wedge\cdots\wedge dx^{j_s}\\&=d\omega\wedge\eta+(-1)^r\omega\wedge d\eta.\end{aligned}$$

(3°) $s=0,\omega=f\in\wedge^0(M)$．$df=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x^i}dx^i$．

$$d^2f=d\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x^i}dx^i\right)=\sum_{i=1}^{n}d\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)\wedge dx^i$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j}dx^j\wedge dx^i$$

$$=\sum_{i<j}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j}-\frac{\partial^2 f}{\partial x^j\partial x^i}\right)dx^i\wedge dx^j=0.$$

$s\geqslant1$，设 $\omega=f\wedge dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_s}$，则

$$d\omega=df\wedge dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_s},$$

$$d^2\omega=d\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x^i}dx^i\wedge dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_s}\right)$$

$$=\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j}dx^j\wedge dx^i\wedge dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_s}$$

$$=\sum_{i<j}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j}-\frac{\partial^2 f}{\partial x^j\partial x^i}\right)dx^j\wedge dx^i\wedge dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_r}$$

$$=0.$$

(4°) 利用(2°)和归纳法(留作习题). #

定理 5 设$(M_1,\mathscr{D}_1)$和$(M_2,\mathscr{D}_2)$分别是 m 维和 n 维 C^∞流形,

$$F: M_1\to M_2$$

是 C^∞映射,且

$$\omega,\omega_1,\omega_2\in\wedge^r(M_2),\eta\in\wedge^s(M_2),f\in\wedge^0(M_2)=C^\infty(M_2)$$

则

(1°) $F^*\omega\in\wedge^r(M_1)$.

(2°) $F^*(\omega_1+\omega_2)=F^*\omega_1+F^*\omega_2$.

(3°) $F^*(f\cdot\omega)=(f\circ F)\cdot F^*\omega$.

(4°) $F^*(\omega\wedge\eta)=F^*\omega\wedge F^*\eta$.

(5°) $$F^*\left(\sum_{1\leqslant j_1<\cdots<j_r\leqslant n}\omega_{j_1\cdots j_r}dy^{j_1}\wedge\cdots\wedge dy^{j_r}\right)$$

$$=\sum_{\substack{1\leqslant i_1<\cdots<i_r\leqslant m\\ 1\leqslant j_1<\cdots<j_r\leqslant n}}(\omega_{j_1\cdots j_r}\circ F)\frac{\partial(y^{j_1},\cdots,y^{j_r})}{\partial(x^{i_1},\cdots,x^{i_r})}dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_r}.$$

特别地,

$$F^*(dy^j)=\sum_{i=1}^m\frac{\partial y^j}{\partial x^i}dx^i\qquad\text{(第二章§5.1 定理 4)}.$$

当 $n=m$ 时,

$$F^*(f\,dy^1\wedge\cdots\wedge dy^n)=(f\circ F)\frac{\partial(y^1,\cdots,y^n)}{\partial(x^1,\cdots,x^n)}dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n.$$

(6°) $d(F^*\omega)=F^*(d\omega)$ (d 与 F^*可交换).

证明 (1°) 由第二章§5.1定理5，$F^*\omega$ 是 r 阶 C^∞ 协变张量场，又因为

$$F^*\omega(X_{\pi(1)},\cdots,X_{\pi(r)})=\omega(F_*X_{\pi(1)},\cdots,F_*X_{\pi(r)})$$
$$=(-1)^\pi\omega(F_*X_1,\cdots,F_*X_r)$$
$$=(-1)^\pi F^*\omega(X_1,\cdots,X_r),$$

所以 $F^*\omega$ 是反称的，这就证明了 $F^*\omega\in\wedge^r(M_1)$。

(2°)，(3°)显然。

(4°) $F^*(\omega\wedge\eta)(X_1,\cdots,X_{r+s})=\omega\wedge\eta(F_*X_1,\cdots,F_*X_{r+s})$

$$=\frac{(r+s)!}{r!s!}A(\omega\otimes\eta)(F_*X_1,\cdots,F_*X_{r+s})$$

$$=\frac{(r+s)!}{r!s!}\cdot\frac{1}{(r+s)!}\sum_\pi(-1)^\pi\omega\otimes\eta(F_*X_{\pi(1)},\cdots,F_*X_{\pi(r+s)})$$

$$=\frac{(r+s)!}{r!s!}\cdot\frac{1}{(r+s)!}\sum_\pi(-1)^\pi\omega(F_*X_{\pi(1)},\cdots,F_*X_{\pi(r)})\cdot\eta(F_*X_{\pi(r+1)},\cdots,F_*X_{\pi(r+s)})$$

$$=\frac{(r+s)!}{r!s!}\cdot\frac{1}{(r+s)!}\sum_\pi(-1)^\pi F^*\omega(X_{\pi(1)},\cdots,X_{\pi(r)})\cdot F^*\eta(X_{\pi(r+1)},\cdots,X_{\pi(r+s)})$$

$$=\frac{(r+s)!}{r!s!}\cdot\frac{1}{(r+s)!}\sum_\pi(-1)^\pi F^*\omega\otimes F^*\eta(X_{\pi(1)},\cdots,X_{\pi(r+s)})$$

$$=\frac{(r+s)!}{r!s!}A(F^*\omega\otimes F^*\eta)(X_1,\cdots,X_{r+s})$$

$$=F^*\omega\wedge F^*\eta(X_1,\cdots,X_{r+s}).$$

(5°) 由(2°),(3°),(4°)和

$$F^*(dy^j)=\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial y^j}{\partial x^i}dx^i$$

得到

$$F^*\left(\sum_{1\leqslant j_1<\cdots<j_r\leqslant n}\omega_{j_1\cdots j_r}dy^{j_1}\wedge\cdots\wedge dy^{j_r}\right)$$

$$=\sum_{1\leqslant j_1<\cdots<j_r\leqslant n}(\omega_{j_1\cdots j_r}\circ F)F^*(dy^{j_1})\wedge\cdots\wedge F^*(dy^{j_r})$$

$$=\sum_{1\leqslant j_1<\cdots<j_r\leqslant n}(\omega_{j_1\cdots j_r}\circ F)\cdot\left(\sum_{i_1=1}^{n}\frac{\partial y^{j_1}}{\partial x^{i_1}}dx^{i_1}\right)\wedge\cdots\wedge$$

$$\left(\sum_{i_r=1}^{n}\frac{\partial y^{j_r}}{\partial x^{i_r}}dx^{i_r}\right)$$

$$=\sum_{\substack{1\leqslant i_1<\cdots<i_r\leqslant n\\1\leqslant j_1<\cdots<j_r\leqslant n}}(\omega_{j_1\cdots j_r}\circ F)\left(\sum_{\pi}(-1)^{\pi}\frac{\partial y^{j_{\pi(1)}}}{\partial x^{i_1}}\cdots\frac{\partial y^{j_{\pi(r)}}}{\partial x^{i_r}}\right)$$

$$dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_r}$$

$$=\sum_{\substack{1\leqslant i_1<\cdots<i_r\leqslant n\\1\leqslant j_1<\cdots<j_r\leqslant n}}(\omega_{j_1\cdots j_r}\circ F)\frac{\partial(y^{j_1},\cdots,y^{j_r})}{\partial(x^{i_1},\cdots,x^{i_r})}dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_r}.$$

(6°) 设 $\{x^i\}$ 是 $p\in M_1$ 的局部坐标系，$\{y^j\}$ 是 $F(p)\in M_2$ 的局部坐标系。只须对单项式

$$\omega=\omega_{j_1\cdots j_r}dy^{j_1}\wedge\cdots\wedge dy^{j_r}$$

给以证明，事实上，

$$F^*(dy^j)=\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial y^j}{\partial x^i}dx^i=d(y^j\circ F)=d(F^*y^j).$$

$$F^*(d\omega_{j_1\cdots j_r})=F^*\left(\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\partial\omega_{j_1\cdots j_r}}{\partial y^\alpha}dy^\alpha\right)$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{n}\left(\frac{\partial \omega_{j_1\cdots j_r}}{\partial y^\alpha}\circ F\right)\cdot F^*(dy^\alpha)$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{m}\left(\frac{\partial \omega_{j_1\cdots j_r}}{\partial y^\alpha}\circ F\right)\cdot \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\beta}dx^\beta$$

$$= \sum_{\beta=1}^{m}\frac{\partial(\omega_{j_1\cdots j_r}\circ F)}{\partial x^\beta}dx^\beta$$

$$= d(\omega_{j_1\cdots j_r}\circ F) = d(F^*\omega_{j_1\cdots j_r}).$$

从而有

$$\begin{aligned} F^*(d\omega) &= F^*(d\omega_{j_1\cdots j_r}\wedge dy^{j_1}\wedge\cdots\wedge dy^{j_r}) \\ &= F^*(d\omega_{j_1\cdots j_r})\wedge F^*(dy^{j_1})\wedge\cdots\wedge F^*(dy^{j_r}) \\ &= d(\omega_{j_1\cdots j_r}\circ F)\wedge d(y^{j_1}\circ F)\wedge\cdots\wedge d(y^{j_r}\circ F) \\ &\quad \text{(由定理 4 的}(2^\circ),(4^\circ),(3^\circ)) \\ &= d[(\omega_{j_1\cdots j_r}\circ F)d(y^{j_1}\circ F)\wedge\cdots\wedge d(y^{j_r}\circ F)] \\ &= d(F^*\omega). \qquad \# \end{aligned}$$

6. 闭形式和恰当形式

定义 6 M 上的一个 C^∞ 微分形式 ω,如果 $d\omega=0$,则称为**闭形式**. 如果 η 是 M 上的一个 C^∞ 形式,并且 $\omega=d\eta$,则称 ω 为**恰当形式**.

例 3 由定理 4(3°) 可知,恰当形式 $\omega=d\eta$ 必为闭形式($d\omega=d(d\eta)=0$). 我们自然要问,一个闭形式是否必为恰当形式,回答是否定的,经典的反例是定义在 $M=R^2-\{0\}$上的 C^∞ 的 1-形式:

$$\omega=\frac{-y}{x^2+y^2}dx+\frac{x}{x^2+y^2}dy,$$

容易验证 $d\omega=0$,但它不是恰当的(留作习题).

例 4 设 $\omega=\sum_{i=1}^{n}\omega_i dx^i$ 是 R^n 上的 C^∞ 的 1-形式,如果 ω 是

恰当的，则存在 C^∞ 函数 f，使得

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i dx^i = \omega = df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i, \quad \frac{\partial f}{\partial x^i} = \omega_i.$$

于是，我们定义

$$f(x) = f(0) + \int_0^1 \frac{d}{dt} f(tx) dt = f(0) + \int_0^1 \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}(tx) \cdot x^i dt$$

$$= f(0) + \sum_{i=1}^{n} \int_0^1 \omega_i(tx) \cdot x^i dt$$

为了说明这样构造的 f 确是 $df = \omega$，我们讨论更一般的

定理 6 (Poincaré 引理). 如果 $M \subset R^n$ 是包含 0 的**星形状开集**(即任何 $x \in M$，从 0 到 x 的直线段包含在 M 中)，则在 M 上的每个闭形式是恰当的.

证明 我们定义映射

$$I_s: \wedge^s(M) \longrightarrow \wedge^{s-1}(M)$$
$$\omega \longrightarrow I_s(\omega)$$

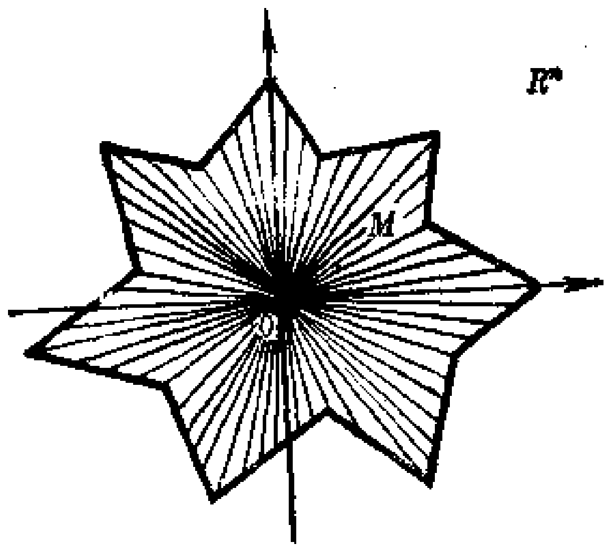


图 56

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_s \leq n} \omega_{i_1 \cdots i_s} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_s},$$

$$d\omega=\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_s\leqslant n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\omega_{i_1\cdots i_s}}{\partial x^i}dx^i\wedge dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_s},$$

$$I_s(\omega)=\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_s\leqslant n}\sum_{\alpha=1}^{s}(-1)^{\alpha-1}\left(\int_0^1 t^{s-1}\omega_{i_1\cdots i_s}(tx)dt\right)$$

$$x^{i_\alpha}dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge\widehat{dx^{i_\alpha}}\wedge\cdots\wedge dx^{i_s}$$

（因为 M 是星形状开集，故积分有意义）.

显然，$I_s(0)=0$，下面可证

$$\omega=d(I_s(\omega))+I_s(d\omega).$$

因此，如果 $d\omega=0$，就可推出

$$\omega=d(I_s(\omega))+I_s(0)=d(I_s(\omega)).$$

最后，我们来证明

$$d(I_s(\omega))+I_s(d\omega)=s\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_s\leqslant n}\left(\int_0^1 t^{s-1}\omega_{i_1\cdots i_s}(tx)dt\right)$$

$$dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_s}+\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_s\leqslant n}\sum_{\alpha=1}^{s}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{\alpha-1}\left(\int_0^1 t^s\frac{\partial\omega_{i_1\cdots i_s}}{\partial x^i}\right.$$

$$\left.(tx)dt\right)x^{i_\alpha}dx^i\wedge dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge\widehat{dx^{i_\alpha}}\wedge\cdots\wedge dx^{i_s}$$

$$+\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_s\leqslant n}\sum_{i=1}^{n}\left(\int_0^1 t^s\frac{\partial\omega_{i_1\cdots i_s}}{\partial x^i}(tx)dt\right)x^i\cdot dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_s}$$

$$-\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_s\leqslant n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\alpha=1}^{s}(-1)^{\alpha-1}\left(\int_0^1 t^s\frac{\partial\omega_{i_1\cdots i_s}}{\partial x^i}(tx)dt\right)$$

$$x^{i_\alpha}dx^i\wedge dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge\widehat{dx^{i_\alpha}}\wedge\cdots\wedge dx^{i_s}$$

$$=\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_s\leqslant n}s\cdot\left(\int_0^1 t^{s-1}\omega_{i_1\cdots i_s}(tx)dt\right)dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_s}$$

$$+\sum_{1\le i_1<\cdots<i_s\le n}\sum_{j=1}^{n}\left(\int_0^1 t^s\frac{\partial\omega_{i_1\cdots i_s}}{\partial x^j}(tx)dt\right)x^j\cdot dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_s}$$

$$=\sum_{1\le i_1<\cdots<i_s\le n}\left[\int_0^1\frac{d}{dt}(t^s\omega_{i_1\cdots i_s}(tx)dt)\right]dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_s}$$

$$=\sum_{1\le i_1<\cdots<i_s\le n}\omega_{i_1\cdots i_s}dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_s}.\qquad \#$$

7. De Rham 上同调群

定义 7 C^∞流形$(M,\mathscr{D})$上的 s 阶外微分形式的全体关于加法自然地成一群$\wedge^s(M)$,而外微分运算 d 定义了一个同态

$$d=d_s:\ \wedge^s(M)\to\wedge^{s+1}(M).$$

设 $Z_D^s(M)=\{\omega\in\wedge^s(M)\mid d\omega=0\}=d_s$ 的核,表示M上闭s-形式所成的群. 而

$B_D^s(M)=\{\omega\in\wedge^s(M)\mid\omega=d\eta,\eta\in\wedge^{s-1}(M)\}=d_{s-1}$ 的象,表示 M 上恰当 s-形式的群.

因为 $d^2=0$,所以 $B_D^s(M)\subset Z_D^s(M)$.

我们称商群

$$H_D^s(M)=Z_D^s(M)/B_D^s(M)$$

为 M 上的**第 s 个 de Rham 上同调群**. $H_D^s(M)$中的元素称为(外微分)同调类. ω 的同调类记为$[\omega]$. 显然,

$$[\omega_1]=[\omega_2]\Longleftrightarrow\omega_1=\omega_2+d\eta,\eta\in\wedge^{s-1}(M).$$

下面我们不加证明地叙述一个重要的

De Rham 定理 如果$(M,\mathscr{D})$是可定向的C^∞闭流形,则

$$H_D^s(M)\cong H^s(M).$$

注 上式左边由 M 的微分构造 $\mathscr{D}$ 所决定. 而右边则是由 M 的拓扑决定的通常的上同调群. 二者的同构在微分几何与拓扑之间建立了联系. 从这定理还可以看出,由同一个拓扑流形 M 的二个不同微分构造 $\mathscr{D}_1$ 和 $\mathscr{D}_2$ 所决定的 de Rham 上同调群

$$H^s_{D_1}(M) \cong H^s_{D_2}(M).$$

de Rham 定理最早为 E. Cartan 所猜测，且首先明确叙述出来，并证明了一些特殊情形. 1931 年 de Rham 将此猜测完全证明，在法国部分文献中，亦称此定理为 Cartan-de Rham 定理.

de Rham 定理指出了

$$H^*_D(M) = \sum_{s \geqslant 0} H^s_D(M)$$

与

$$H^*(M) = \sum_{s \geqslant 0} H^s(M)$$

二群的群构造相同，但根据 Cartan 工作，$H^*_D(M)$ 不仅是群，且在其中可以定义乘法 $\wedge$，使其成为一环. 因而 $H^*(M)$ 亦有乘法而成一环.

对于任意可剖分空间 K，是否在其上同调群

$$H^*(K) = \sum_{s \geqslant 0} H^s(K)$$

内可定义一乘法使其成为一环，且在 K 成为一 C^∞ 闭流形 M 时，此上同调环与环 $H^*_D(M)$ 不仅具有相同的群构造，而且具有相同的环构造.

此问题在 1935 年获得了正面的解决，稍后，在 H. Whitney的工作中更为圆满地定义了"上同调环"，至今 H. Whitney 的文章仍是一篇意义深远的、经典性工作.

例 5 如果 $(M, \mathscr{D})$ 是 C^∞ 的连通流形，则 $H^0_D(M) \cong R$.

因为不存在次数小于 0 的形式，即 $B^0_D(M) = 0$，则

$$H^0_D(M) = Z^0_D(M) = \{f \in \wedge^0(M) \mid df = 0\}.$$

若 (U, φ)，$\{x^i\}$ 是 M 的任意连通坐标邻域. 由

$$df|_U = 0.$$

$$0=df=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}f\right)dx^i,$$

得到$\frac{\partial}{\partial x^i}f=0$ $(i=1,\cdots,n)$. 这就蕴涵着 $f|_U=$常数. 由于M是连通的，且 f 在每个连通坐标邻域上是常数，从而 $f|_M=$常数. 于是，

$$H_D^0(M)=Z_D^0(M)=\{f\,|\,f\text{ 在} M\text{ 上是常值函数}\}\cong R.$$

例 6 设$(S^1,\mathscr{D})$是通常的 C^∞ 流形，则 $H_D^1(S^1)\cong R^1$.

因为 $s>1$ 时不存在 S^1 上的非零 s-形式，$Z_D^1(S^1)=\wedge^1(S^1)$，且

$$B_D^1(S^1)=\{df\,|\,f\in\wedge^0(S^1)\}.$$

如果θ 表示 S^1 上的极坐标，则$\frac{\partial}{\partial\theta}$是 S^1 上的整体 C^∞ 的处处非零向量场，而它的对偶 1-形式 $d\theta$ 是 S^1 上的整体 C^∞ 的处处非零 1-形式，此外 $d\theta$ 不是恰当的(注意 θ 不是整体的 C^∞ 函数!)。但是，对于 S^1 上的任意 1-形式 $\omega=g(\theta)d\theta$，则

$$\omega-\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}g(\theta)d\theta\right)d\theta$$

是 S^1 上的恰当 1-形式. 事实上，

$$f(\theta)=\int_0^\theta g(t)dt-\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}g(t)dt\right)\theta$$

是以 2π 为周期的 C^∞ 函数，即 f 是 S^1 上的 C^∞ 函数. 并且

$$df=g(\theta)d\theta-\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}g(t)dt\right)d\theta$$

因此，

$$H_D^1(S^1)=Z_D^1(S^1)/B_D^1(S^1)\cong\{cd\theta\,|\,c\in R\}\cong R.$$

定理 7(Poincaré) 如果 $M\subset R^n$ 是包含 0 的星形状开集，则对所有 $s>0$，

$$H_D^s(M)=0.$$

证明 由定理 6 可知 $Z^s_D(M)=B^s_D(M)$，所以

$$H^s_D(M)=Z^s_D(M)/B^s_D(M)=0. \qquad \#$$

定理 8 设$(M_1,\mathscr{D}_1)$和$(M_2,\mathscr{D}_2)$分别是 m 维和 n 维 C^∞ 流形，而

$$F: M_1 \to M_2$$

是 C^∞ 映射，则

$$F^*: Z^s_{D_2}(M_2)\to Z^s_{D_1}(M_1),$$

$$F^*: B^s_{D_2}(M_2)\to B^s_{D_1}(M_1)$$

是线性映射，因而诱导出上同调上的一个线性映射 $\tilde{F}$，使得

$$\tilde{F}: H^s_{D_2}(M_2)=Z^s_{D_2}(M_2)/B^s_{D_2}(M_2)\to Z^s_{D_1}(M_1)/B^s_{D_1}(M_1)$$
$$=H^s_{D_1}(M_1)$$

证明 如果$\omega\in Z^s_{D_2}(M_2)$，则由定理 5 (6°)得到

$$d(F^*\omega)=F^*(d\omega)=F^*(0)=0,$$

即

$$F^*\omega\in Z^s_{D_1}(M_1).$$

如果 $\omega\in B^s_{D_2}(M_2)$，即 $\omega=d\eta,\eta\in\wedge^{s-1}(M_2)$，则由定理 5(6°)得到

$$F^*\omega=F^*(d\eta)=d(F^*\eta),F^*\eta\in\wedge^{s-1}(M_1).$$

故 $F^*\omega\in B^s_{D_1}(M_1)$. #

8. Lie 群 G 上的左不变外微分形式

定义 8 设 ω 是 C^∞ Lie 群 G 上的外形式，如果对于任何 a，$b\in G$，有

$$(L^*_{ba^{-1}})_b\omega_b=\omega_a,$$

则称 ω 为**左不变的外微分形式**. 类似地，可定义**右不变的外微分形式**. 特别，**左不变的 Pfaff 形式**称为 **Maurer-Cartan 微分形式**.

定理 9 ω 是 C^∞ Lie 群 G 上的左不变的外微分形式

$\Longleftrightarrow$对任何 $a\in G$，$\omega_a=(L^*_{a^{-1}})_a\omega_e$，($\omega$ 由 ω_e 完全确定)

$\Longleftrightarrow$对任何 $a\in G$，$\omega=L^*_{a^{-1}}\omega$.

此外，ω 是 C^∞ 的外微分形式.

证明 类似于第二章§4.3定理4的证明(留作习题). #

定理 10 (1°) 设 $X_1,\cdots,X_s$ 是 C^∞ Lie 群 G 上的左不变向量场,ω 是 s 阶左不变外微分形式,则

$$\omega(X_1,\cdots,X_s)=\text{常数}.$$

(2°) 设 $L(G)^*$ 表示 Maurer-Cartan 微分形式之全体，则它是一个 R 上的 n 维向量空间. 且 $L(G)^*$ 与 $L(G)$ 互为对偶的向量空间.

(3°) 设 $X_1,\cdots,X_n$ 是 $L(G)$ 的基,取其 $L(G)^*$ 中的对偶基为

$$\omega^1,\cdots,\omega^n(\text{即 }\omega^i(X_j)=\delta^i_j),\text{则}$$

$\omega^1\wedge\cdots\wedge\omega^n$ 是 n 阶左不变外微分形式，且 $\omega^1\wedge\cdots\wedge\omega^n\neq0$. 因而,由定理9，它是 G 上的处处不为0的 C^∞ 的 n 阶外微分形式.

证明 (1°) $\omega_a((X_1)_a,\cdots,(X_s)_a)=L^*_{a^{-1}}\omega_e((X_1)_a,\cdots,(X_s)_a)=\omega_e(L_{*a^{-1}}(X_1)_a,\cdots,L_{*a^{-1}}(X_s)_a)=\omega_e((X_1)_e,\cdots,(X_s)_e)=$ 常数.

(2°) 留作习题.

(3°) 因为 $L^*_{a^{-1}}(\omega^1\wedge\cdots\wedge\omega^n)=(L^*_{a^{-1}}\omega^1)\wedge\cdots\wedge(L^*_{a^{-1}}\omega^n)=\omega^1\wedge\cdots\wedge\omega^n$, 所以，$\omega^1\wedge\cdots\wedge\omega^n$ 是 n 阶左不变外微分形式. 且由习题10(3°)可知

$$\omega^1\wedge\cdots\wedge\omega^n(X_1,\cdots,X_n)=\det\begin{pmatrix}\omega^1(X_1)\cdots\omega^1(X_n)\\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\\ \omega^n(X_1)\cdots\omega^n(X_n)\end{pmatrix}$$

$$=\det\begin{pmatrix}1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & 1\end{pmatrix}=1,$$

故 $\omega^1\wedge\cdots\wedge\omega^n\neq0$. #

5.2 习 题

1. 证明引理1后注中的(2°)和(3°).

2. 证明 $A(\theta)(X_1,\cdots,X_s)=\frac{1}{s!}\sum_{\pi}(-1)^{\pi}\theta(X_{\pi(1)},\cdots,X_{\pi(s)})$

$$\Longleftrightarrow A(\theta)_{i_1\cdots i_s}=\frac{1}{s!}\sum_{\pi}(-1)^{\pi}\theta_{i_{\pi(1)}\cdots i_{\pi(s)}}.$$

3. 证明定理 4 (4°).

4. 证明定理 2 后的注.

5. 证明例 6 中的 $d\theta$ 是 S^1 上的 C^∞ 闭 1-形式,但不是恰当形式.

6. 证明 例 3 中 $R^2-\{0\}$ 上的

$$\omega=\frac{-y}{x^2+y^2}dx+\frac{x}{x^2+y^2}dy$$

是 C^∞ 闭 1 形式, 但不是恰当的.

$$\left(\text{提示: } d\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}+C\right)=\frac{-y}{x^2+y^2}dx+\frac{x}{x^2+y^2}dy.\right)$$

7. 在 R^n 中寻求一 C^∞ 的 $(n-1)$-形式 ω,使得

$$d\omega=dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n.$$

8. (1°) 设 $\omega\in\bigwedge_p^n(M)$,则 $\omega=0\Longleftrightarrow$对 $T_p(M)$的某个基$\{e_i\}$有

$$\omega(e_1,\cdots,e_n)=0.$$

(2°) 设$\{e_i\}$是 $T_p(M)$的一个基,$X_i=\sum_{j=1}^{n}a_i^je_j$ 是 $T_p(M)$ 中的 n 个向量,则

$$\omega(X_1,\cdots,X_n)=\det(a_i^j)\cdot\omega(e_1,\cdots,e_n).$$

因此,$\omega=\lambda\cdot\det$ $(\lambda=\omega(e_1,\cdots,e_n),\det\in\bigwedge_p^n(M))$.

(3°) 证明: $\omega\wedge 0=0$,

$$0\wedge\omega=0\quad(\omega\in\bigwedge^r(M),0\in\bigwedge^s(M)).$$

(4°) 证明: 对任何 $\omega\in\bigwedge_p^1(M)$,$\omega\wedge\omega=0\Longleftrightarrow$对任何

$$\omega_1,\omega_2\in\bigwedge_p^1(M),\omega_1\wedge\omega_2=-\omega_2\wedge\omega_1.$$

9. 证明 (1°) $\sum_{s\geq 0}Z_D^s(M)$关于加法、数乘和$\wedge$形成 $\sum_{s\geq 0}\bigwedge^s(M)$ 的一个子环.

(2°) $\sum_{s\geq 0} B_D^s(M)$关于加法、数乘和$\wedge$形成$\sum_{s\geq 0} Z_D^s(M)$的一个子环。

10. 设$\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\right\}$是 Lie 群$G$的坐标基，$\{dx^i\}$是对偶基，证明

(1°) $dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_s}\left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^{i_s}}\right)=1(i_1<\cdots<i_s)$。如果因子$\frac{(r+s)!}{r!s!}$不出现在$\wedge$的定义中，右边将是什么？

(2°) 如果 $X_i=\sum_{j=1}^{n} a_i^j\frac{\partial}{\partial x^j}(i=1,\cdots,s)$，则

$$dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_s}(X_1,\cdots,X_s)=\det\begin{pmatrix}a_1^{i_1}\cdots a_1^{i_s}\\ \cdots\cdots\\ a_s^{i_1}\cdots a_s^{i_s}\end{pmatrix}.$$

(3°) 如果 $\alpha_i\in\wedge^1_p(M)(i=1,\cdots,s)$，则

$$\alpha_1\wedge\cdots\wedge\alpha_s(X_1,\cdots,X_s)=\det\begin{pmatrix}\alpha_1(X_1)\cdots\alpha_1(X_s)\\ \cdots\cdots\cdots\\ \alpha_s(X_1)\cdots\alpha_s(X_s)\end{pmatrix}.$$

11. 利用归纳法和$\omega=\eta\wedge dx^j$证明$d(F^*\omega)=F^*(d\omega)$。

12. 设$F:M_1\to M_2$和$G:M_2\to M_3$都是C^∞的，证明：

(1°) 如果F是常值映射，则$F^*=0$(即对任何ω，$F^*\omega=0$)。

(2°) $(G\circ F)^*=F^*\circ G^*$。

(3°) $\widetilde{(G\circ F)}=\widetilde{F}\circ\widetilde{G}$。

13. 设$\omega\in\wedge^s(M)$，如果对任何$p\in M$，必存在含p的开集U_p，使得

$$\omega|_{U_p}=d\eta,\eta\in\wedge^{s-1}(U_p),$$

则称ω为**局部恰当的**。证明：

ω是闭形式$\Longleftrightarrow\omega$是局部恰当的。

举出局部恰当但不是恰当的例子。

14. 设$(M,\mathscr{D})$是n维C^∞流形，为了定义外微分运算

$$d:\wedge^s(M)\to\wedge^{s+1}(M)$$

$$\omega\longmapsto d\omega,$$

我们首先在每个局部坐标系$(U_\alpha,\varphi_\alpha)$，$\{x^i\}$中定义

$$d_x f=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x^i}dx^i \quad \left(显然\ d_x x^j=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial x^j}{\partial x^i}dx^i=dx^j\right).$$

$$d_x\omega=d_x\left(\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_s\leqslant n}\omega_{i_1\cdots i_s}dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_s}\right)$$

$$=\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_s\leqslant n}d_x\omega_{i_1\cdots i_s}dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_s}.$$

$$=\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_s\leqslant n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\omega_{i_1\cdots i_s}}{\partial x^i}dx^i\wedge dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_s}.$$

再由下面引理中的(4°)知道

$$d_x\omega=d_y\omega(在\ U_\alpha\cap U_\beta\ 中),$$

因此，可以定义整体的 $s+1$ 阶外微分形式 $d\omega$ 为

$$d\omega|_{U_\alpha}=d_x\omega.$$

引理 (1°) $d_x(\omega+\eta)=d_x\omega+d_x\eta.$

$$d_x(\lambda\omega)=\lambda d_x\omega \quad (\lambda\in R^1,\omega,\eta\in\wedge^s(M)).$$

(2°) $d_x(\omega\wedge\eta)=d_x\omega\wedge\eta+(-1)^r\omega\wedge d_x\eta$ $(\omega\in\wedge^r(M),\eta\in\wedge^s(M))$.（提示：只须对 $\omega=\omega_{i_1\cdots i_r}dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_r}$，$\eta=\eta_{j_1\cdots j_s}dx^{j_1}\wedge\cdots\wedge dx^{j_s}$ 证明即可）.

(3°) $d_x^2\omega=d_x(d_x\omega)=0$ $(\omega\in\wedge^s(M))$.

(4°) 设 $(U_\alpha,\varphi_\alpha)$，$\{x^i\}$ 和 (U_β,φ_β)，$\{y^i\}$ 是两个局部坐标系，则

$$d_x\omega=d_y\omega\ (在\ U_\alpha\cap U_\beta\ 中)$$

（提示：利用归纳法，当 $s=k$ 时，只须对 $\omega=\eta\wedge dx^j$，$\eta\in\wedge^{k-1}(U_\alpha\cap U_\beta)$ 加以证明.）然后，证明：

定理 (1°) $d(\omega+\eta)=d\omega+d\eta.$

$$d(\lambda\omega)=\lambda d\omega \quad (\lambda\in R^1,\omega,\eta\in\wedge^s(M)).$$

(2°) $d(\omega\wedge\eta)=d\omega\wedge\eta+(-1)^r\omega\wedge d\eta$ $(\omega\in\wedge^r(M),\eta\in\wedge^s(M))$.

(3°) $d^2\omega=d(d\omega)=0.$

(4°) $d(F^*\omega)=F^*(d\omega).$

定理 设 $\omega\in\wedge^s(M)$，X_i 是 M 上的 C^∞ 向量场 $(i=1,\cdots,s+1)$，由本题中的定义，有

$$d\omega(X_1,\cdots,X_{s+1})=\sum_{i=1}^{s+1}(-1)^{i+1}X_i\cdot\omega(X_1,\cdots,\hat{X}_i,\cdots,X_{s+1})$$

$$+\sum_{i<j}(-1)^{i+j}\omega([X_i,X_j],X_1,\cdots,\hat{X}_i,\cdots,\hat{X}_j,\cdots,X_{s+1}).$$

（参看　岩堀长庆[6]50—57页.）

15. (1°) 如果 $\omega\in\wedge^2(M)$，问 $\omega\wedge\omega=0$? 举例说明.

(2°) 直接利用定义5中的公式，证明 $d^2f=0$，其中 $f\in\wedge^0(M)$.

(3°) 设 $\omega\in\wedge^1(M)$，写出 $d\omega(X_1,X_2)$的表达式.

16. (1°) 设 ω 是 C^∞ Lie 群 G 上的左不变外微分形式，证明 $d\omega$ 也是左不变外微分形式.

(2°) 设 $\omega_1,\cdots,\omega_k$都是 C^∞ Lie 群 G 上的左不变外微分形式，证明 $\omega_1\wedge\cdots\wedge\omega_k$ 也是左不变外微分形式.

(3°) 设 $X_1,\cdots,X_n$ 是 $L(G)$ 的基，而 $\omega^1,\cdots,\omega^n$ 是 $L(G)^*$ 中的对偶基 $(\omega^i(X_j)=\delta^i_j)$. 设

$$d\omega^i=\sum_{j<k}r^i_{jk}\omega^j\wedge\omega^k,$$

证明 r^i_{jk} 是 G 上的常值函数，且 $r^i_{jk}=-c^i_{jk}(j<k)$，因而

$$d\omega^i=-\sum_{j<k}c^i_{jk}\omega^j\wedge\omega^k$$（其中 c^i_{jk} 是第二章§4.3习题4中的构造常数）.

17. (Cartan 引理)设 $\theta_i,\eta_i\in T_p^*(M),1\leqslant i\leqslant k$.

其中 θ_i 线性无关，且 $\sum_i\theta_i\wedge\eta_i=0$ 证明：

$$\eta_i=\sum_{1\leqslant j\leqslant k}h_{ij}\theta_j,\qquad \text{其中 } h_{ij}=h_{ji}.$$

§6　流形 M 的定向、∂M 的诱导定向

6.1　流形 M 的定向

1. R^n 的定向

设$[e_1,\cdots,e_n]$和$[e_1',\cdots,e_n']$是向量空间 R^n 的两个基，且

$$\begin{pmatrix} e_1' \\ \vdots \\ e_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} \cdots c_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ c_{n1} \cdots c_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}, \quad \det(c_{ij}) \neq 0.$$

如果 $\det(c_{ij})>0$，称$[e_1',\cdots,e_n']\sim[e_1,\cdots,e_n]$（显然$\sim$满足等价关系的三个条件）。容易看出 R^n 的基恰有两个等价类，记$[e_1,\cdots,e_n]$的等价类为$\overrightarrow{[e_1,\cdots,e_n]}$。

如果 $\det(c_{ij})>0$，称这两个基是同向的，记作

$$\overrightarrow{[e_1',\cdots,e_n']} = \overrightarrow{[e_1,\cdots,e_n]}.$$

如果 $\det(c_{ij})<0$，称这两个基是反向的。记作

$$\overrightarrow{[e_1',\cdots,e_n']} = -\overrightarrow{[e_1,\cdots,e_n]}.$$

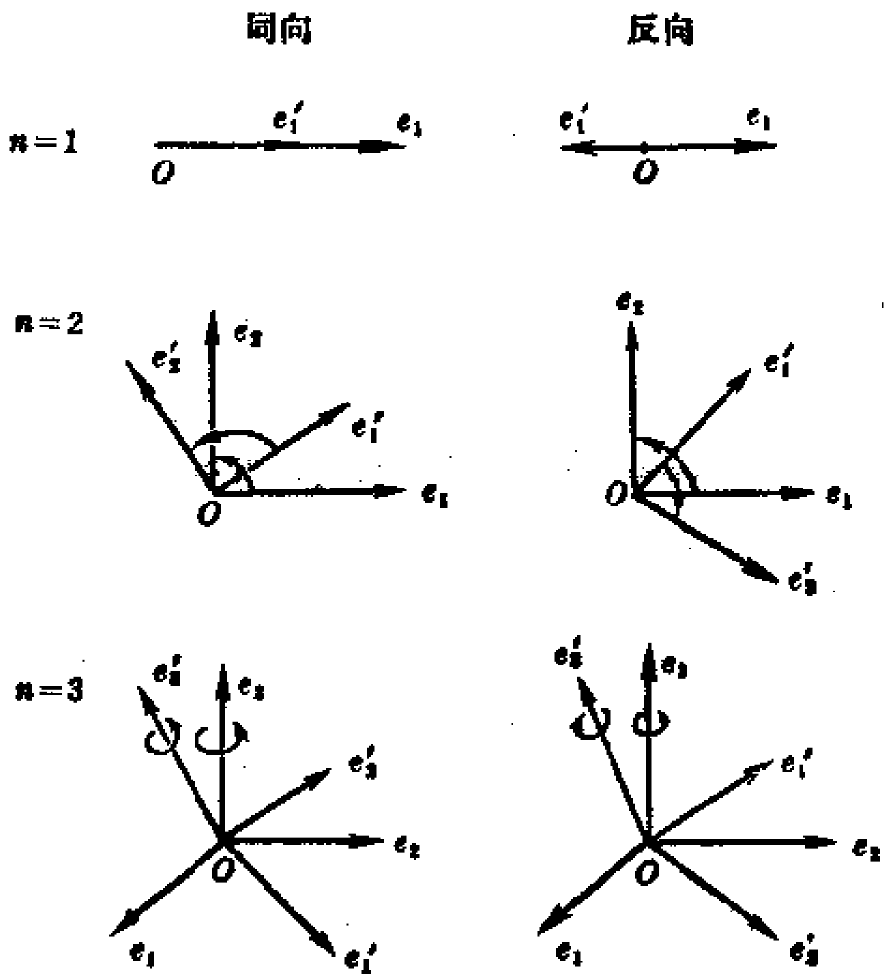


图 57

于是，R^n 恰有两个不同的"定向"(参看图 57)。

2. M 的定向

设$(M,\mathscr{D})$是 n 维 C^∞ 流形，(U,φ)，$\{x^i\}$ 是任一坐标系，我们记

$$\overrightarrow{\left[\frac{\partial}{\partial x^1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^n}\right]}_p=\overrightarrow{\left[\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_p,\cdots,\left(\frac{\partial}{\partial x^n}\right)_p\right]},p\in U.$$

则 $T_p(M)$有两个定向：$\overrightarrow{\left[\frac{\partial}{\partial x^1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^n}\right]}_p$ 和$-\overrightarrow{\left[\frac{\partial}{\partial x^1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^n}\right]}_p$；

而$\overrightarrow{\left[\frac{\partial}{\partial x^1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^n}\right]}$表示该坐标系的**自然定向**，它在每点 $p\in U$ 的定向是

$$\overrightarrow{\left[\frac{\partial}{\partial x^1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^n}\right]}_p.$$

例 1 我们构造另一坐标系 $(U,\rho_{\text{反}}\circ\varphi)$，$\{y^i\}$，其中 $\rho_{\text{反}}:R^n\to R^n$ 是关于 $x^n=0$ 的反射映射，即

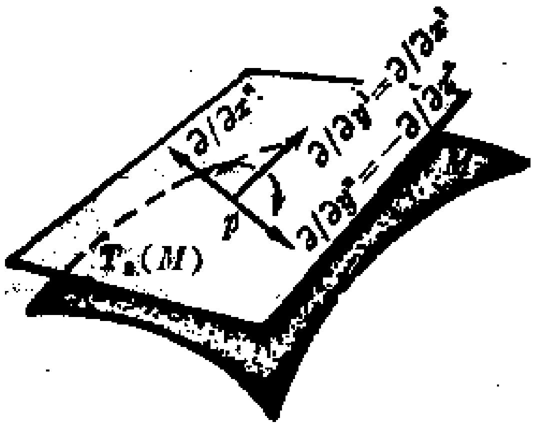


图 58

$$\begin{cases}y^1=x^1,\\ \cdots\cdots\\ y^{n-1}=x^{n-1},\\ y^n=-x^n.\end{cases}$$

显然，

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial y^1}=\dfrac{\partial}{\partial x^1},\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \dfrac{\partial}{\partial y^n}=-\dfrac{\partial}{\partial x^n},\end{cases}$$

所以

$$\overrightarrow{\left[\frac{\partial}{\partial y^1},\cdots,\frac{\partial}{\partial y^n}\right]}=\overrightarrow{\left[\frac{\partial}{\partial x^1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^{n-1}},-\frac{\partial}{\partial x^n}\right]}$$

$$=-\overrightarrow{\left[\frac{\partial}{\partial x^1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^n}\right]}.$$

定义 1 一个 n 维 C^∞ 流形 $(M,\mathscr{D})$ 称为**可定向的**，如果存在 $\mathscr{D}_1'\subset\mathscr{D}$，使得满足：

(1°) $\{U_\alpha|(U_\alpha,\varphi_\alpha)\in\mathscr{D}_1'\}$ 覆盖 M.

(2°) 如果 $(U_\alpha,\varphi_\alpha)$，$\{x^i\}$ 和 (U_β,φ_β)，$\{y^i\}$ 都 $\in\mathscr{D}_1'$，则有

$$\overrightarrow{\left[\frac{\partial}{\partial x^1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^n}\right]}=\overrightarrow{\left[\frac{\partial}{\partial y^1},\cdots,\frac{\partial}{\partial y^n}\right]}\text{(在 } U_\alpha\cap U_\beta \text{ 中)}.$$

此式等价于

$$\begin{pmatrix}\dfrac{\partial}{\partial y^1}\\ \vdots\\ \dfrac{\partial}{\partial y^n}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial x^1}{\partial y^1} & \cdots & \dfrac{\partial x^n}{\partial y^1}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \dfrac{\partial x^1}{\partial y^n} & \cdots & \dfrac{\partial x^n}{\partial y^n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dfrac{\partial}{\partial x^1}\\ \vdots\\ \dfrac{\partial}{\partial x^n}\end{pmatrix},$$

$$\left.\frac{\partial(x^1,\cdots,x^n)}{\partial(y^1,\cdots,y^n)}\right|_{U_\alpha\cap U_\beta}>0.$$

一个可定向流形 $(M,\mathscr{D})$ 的一个**定向**是对满足(1°)与(2°)且关于(2°)具有最大性的子集 $\mathscr{D}_1\subset\mathscr{D}$ 的一个选择. 所谓最大性(3°)是：如果 $(U,\varphi)\in\mathscr{D}$，且它与任何 $(U_\alpha,\varphi_\alpha)\in\mathscr{D}_1$ 满足上述条件(2°)，

则$(U,\varphi)\in\mathscr{D}_1$. 它也等价于，如果$(U,\varphi)\bar{\in}\mathscr{D}_1$，则$(U,\varphi)$与$\mathscr{D}_1$中的某个$(U_\alpha,\varphi_\alpha)$不满足条件$(2^\circ)$.

一个**定向流形**是一个三序组$(M,\mathscr{D},\mathscr{D}_1)$其中$(M,\mathscr{D})$是一个可定向流形，而$\mathscr{D}_1$是$(M,\mathscr{D})$的一个定向. 有时，也用$\mu$来表示，这里$\mu_p=\overrightarrow{\left[\frac{\partial}{\partial x^1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^n}\right]_p}$ $((U,\varphi)\in\mathscr{D}_1,p\in U)$.

如果$(M,\mathscr{D})$不是可定向的，我们称它为**不可定向的**.

注 定义1中的条件(2°)等价于由

$$dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n=\lambda dy^1\wedge\cdots\wedge dy^n$$

所确定的函数$\lambda: U_\alpha\cap U_\beta\to R$，满足

$$\lambda=\left.\frac{\partial(x^1,\cdots,x^n)}{\partial(y^1,\cdots,y^n)}\right|_{U_\alpha\cap U_\beta}>0.$$

引理 1 设$(M,\mathscr{D})$是n维C^∞可定向流形，$\mathscr{D}_1'$如定义1中所述（满足条件(1°)和(2°)）. 则由$\mathscr{D}_1'$唯一确定了一个$\mathscr{D}_1$，使得$\mathscr{D}_1'\subset\mathscr{D}_1\subset\mathscr{D}$，且

$$(M,\mathscr{D},\mathscr{D}_1)$$

是一个定向流形.

证明 令

$\mathscr{D}_1=\{(U,\varphi)\mid(U,\varphi)\in\mathscr{D}$，且与$\mathscr{D}_1'$中的元素满足条件$(2^\circ)\}$.

容易验证$\mathscr{D}_1$满足条件$(1^\circ),(2^\circ),(3^\circ)$ （留作习题），因而$\mathscr{D}_1$是一个定向. #

引理 2 设$(M,\mathscr{D},\mathscr{D}_1)$是一个定向流形，而

$$\mathscr{D}_2=\{(U,\rho_{反}\circ\varphi)\mid(U,\varphi)\in\mathscr{D}_1\},$$

则$(M,\mathscr{D},\mathscr{D}_2)$是另一个定向流形.

更进一步，如果M是连通的，则恰有两个如上所述的定向.

证明 只证后半部分，其余留作习题.

设$\mathscr{D}_3$是M的任一定向. 对于任何$p\in M$，选取p的坐标系(U,φ)，$\{x^i\}\in\mathscr{D}_1$，$(\tilde{U},\tilde{\varphi})$，$\{\tilde{x}^i\}\in\mathscr{D}_1$，$(V,\psi)$，$\{y^i\}\in\mathscr{D}_3$，$(\tilde{V},\tilde{\psi})$，

$\{\tilde{y}^i\}\in\mathscr{D}_3$，则显然有

$$\frac{\partial(x^1,\cdots,x^n)}{\partial(y^1,\cdots,y^n)_p}=\frac{\partial(x^1,\cdots,x^n)}{\partial(\tilde{x}^1,\cdots,\tilde{x}^n)_p}\cdot\frac{\partial(\tilde{x}^1,\cdots,\tilde{x}^n)}{\partial(\tilde{y}^1,\cdots,\tilde{y}^n)_p}$$

$$\cdot\frac{\partial(\tilde{y}^1,\cdots,\tilde{y}^n)}{\partial(y^1,\cdots,y^n)_p}.$$

由 $\mathscr{D}_1$ 和 $\mathscr{D}_3$ 都是定向，故

$$\frac{\partial(x^1,\cdots,x^n)}{\partial(y^1,\cdots,y^n)_p}\text{与}\frac{\partial(\tilde{x}^1,\cdots,\tilde{x}^n)}{\partial(\tilde{y}^1,\cdots,\tilde{y}^n)_p}$$

同号．换句话说，Jacobi 式的正负号与坐标系的选取无关．

如果M是连通的．设$(U,\varphi)\in\mathscr{D}_1$，$(V,\psi)\in\mathscr{D}_3$，$p\in U\cap V$；$(\tilde{U},\tilde{\varphi})\in\mathscr{D}_1$，$(\tilde{V},\tilde{\psi})\in\mathscr{D}_3$，

$$q\in\tilde{U}\cap\tilde{V}.$$

而

$$\sigma:[0,1]\to M,\quad \sigma(0)=p,\quad \sigma(1)=q$$

是 M 中连接 p 和 q 的道路．对于 $t\in[0,1]$，存在$(U_t,\varphi_t)\in\mathscr{D}_1$，$(U_t,\psi_t)\in\mathscr{D}_3$，使得它们的 Jacobi 式 $J_t|_{U_t}$ 同号．因为$\sigma([0,1])$ 是 M 的紧致子集，可选取有限个$\{U_{t_1},\cdots,U_{t_k}\}$覆盖$\sigma([0,1])$．容易看出 $J_{t_1}|_{U_{t_1}},\cdots,J|_{U_{t_k}}$ 都同号，这就推出了 Jacobi 式 $J_{UV}|_p$ 与 $J_{\tilde{U}\tilde{V}}|_q$ 同号．

特别当$(U,\varphi)=(\tilde{U},\tilde{\varphi})$，$(V,\psi)=(\tilde{V},\tilde{\psi})$时，有

$$J_{UV}|_{U\cap V}\text{ 同号．}$$

从上立即得到 $\mathscr{D}_3=\mathscr{D}_1$ 或者 $\mathscr{D}_3=\mathscr{D}_2$（参看图 59）．#

定理 1 设 $(M,\mathscr{D})$ 是 n 维 C^∞ 流形．如果存在 M 上的一个处处不为 0 的 n 阶 C^∞ 微分形式 ω，则 M 是可定向的．

反之，如果$(M,\mathscr{D})$是一个 n 维 C^∞ 的可定向的仿紧流形．则存在一个 M 上的处处不为 0 的 n 阶 C^∞ 微分形式 ω．

证明 (1°)设 (U,φ)，$\{x^i\}\in\mathscr{D}$，且U连通．因而有 C^∞ 函数

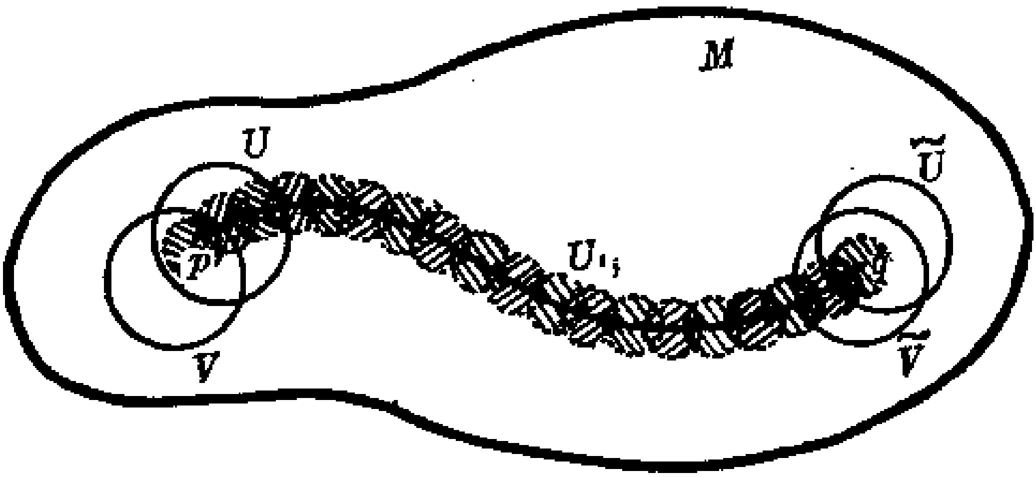


图 59

f_φ: $U\to R^1$，使得

$$\omega=f_\varphi dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n.$$

由于ω处处不为0，f_φ也处处不为0．因此，或者处处$f_\varphi>0$，或者处处$f_\varphi<0$．令

$$\mathscr{D}_1=\{(U,\varphi)\in\mathscr{D}\mid f_\varphi>0\}(\text{这里}U\text{不必连通}),$$

则$\mathscr{D}_1$是M的一个定向，事实上，$\mathscr{D}_1$中的坐标邻域覆盖M，因为对任何$x\in M$，如果在x的坐标系(U,φ)中，$f_\varphi<0$，则在x的新坐标系$(U,\rho_{反}\circ\varphi)$中，$f_{\rho_{反}\circ\varphi}>0$．此外，如果$(U,\varphi)$，$\{x^i\}\in\mathscr{D}_1$，$(V,\psi)$，$\{y^i\}\in\mathscr{D}_1$，则在$U\cap V$上，有

$$dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n=\frac{1}{f_\varphi}\omega=\frac{f_\psi}{f_\varphi}dy^1\wedge\cdots\wedge dy^n,$$

而

$$\frac{\partial(x^1,\cdots,x^n)}{\partial(y^1,\cdots,y^n)}=\frac{f_\psi}{f_\varphi}>0.$$

最大性是显然的．

(2°) 设$\mathscr{D}_1$是M的一个定向，则$\{U\mid(U,\varphi)\in\mathscr{D}_1\}$是$M$的一个开覆盖．因为$M$是仿紧的，所以有局部有限的精致$\{U_\alpha\mid(U_\alpha,\varphi_\alpha)\in\mathscr{D}_1\}$，而$\{g_\alpha\}$是附属于它的1的分解．设$\{x^i_{U_\alpha}\}$为$(U_\alpha,\varphi_\alpha)$的坐

标函数，我们定义

$$\omega=\sum_{\alpha} g_{\alpha} dx_{U_{\alpha}}^{1}\wedge\cdots\wedge dx_{U_{\alpha}}^{n}.$$

显然，ω 是 n 阶 C^{∞} 微分形式.

我们需证 ω 处处不为 0，对任何 $x\in M$，设(U,φ)，$\{y^i\}\in\mathscr{D}_1$，且 $x\in U$。于是，如果 $U\cap U_{\alpha}\neq\phi$，则在 $U\cap U_{\alpha}$ 上有

$$dx_{U_{\alpha}}^{1}\wedge\cdots\wedge dx_{U_{\alpha}}^{n}=f_{\alpha}dy^{1}\wedge\cdots\wedge dy^{n}.$$

因为 (U,φ)，$(U_{\alpha},\varphi_{\alpha})\in\mathscr{D}_1$，所以 $f_{\alpha}|_{U\cap U_{\alpha}}>0$，$f_{\alpha}(x)>0$，$f_{\alpha}(x)g_{\alpha}(x)\geqslant 0$。再由

$$\sum_{\alpha} g_{\alpha}(x)=1$$

可知存在 $g_{\alpha_0}(x)>0$，因而 $g_{\alpha_0}(x)\cdot f_{\alpha_0}(x)>0$ 和

$$\sum_{\alpha} g_{\alpha}(x)\cdot f_{\alpha}(x)>0,$$

这就证明了

$$\omega(x)=\sum_{\alpha} g_{\alpha}dx_{U_{\alpha}}^{1}\wedge\cdots\wedge dx_{U_{\alpha}}^{n}|_{x}$$

$$=\Big(\sum_{\alpha} g_{\alpha}(x)f_{\alpha}(x)\Big)dy^{1}\wedge\cdots\wedge dy^{n}\neq 0.\ \#$$

定理 2 设$(M,\mathscr{D})$是 R^{n+1} 的 n 维 C^{∞} 子流形，如果在M上有一个处处非 0 的"C^{∞}法向量场"，即存在一个 C^{∞} 映射 N：$M\to T(R^{n+1})$ （R^{n+1} 的切丛），使得对每个 $x\in M$，$N(x)$是在 $T_{I(x)}(R^{n+1})$内(I：$M\to R^{n+1}$ 是包含映射)垂直于 $I_{*x}(T_x(M))$的一个非 0 向量．则M是可定向的．

这里，$T_{I(x)}(R^{n+1})$内的垂直性是关于($\{x^i\}$ 是 R^{n+1} 的通常坐标)

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right\rangle = \delta^i_j$$

给出的内积$\langle , \rangle$而言的。

证明 给定法向量场N，在$I(M)$上由

$\mu(I(x))(Y_1, \cdots, Y_n) = dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{n+1}(N(x), Y_1, \cdots, Y_n)$，$x \in M$，$Y_i \in T_{I(x)}(R^{n+1})$，定义了一个$n$形式$\mu$。设$\omega = I^* \mu$，容易看出$\omega$是$M$上的$n$阶$C^\infty$微分形式。由定理1，只需证明$\omega$在$M$上处处不为0。

（反证） 若存在$x \in M$，$\omega(x) = 0$。则对所有的$X_1, \cdots, X_n \in T_x(M)$，

$$\begin{aligned} 0 &= \omega(x)(X_1, \cdots, X_n) \\ &= I^* \mu(x)(X_1, \cdots, X_n) \\ &= \mu(I(x))(I_{*x} X_1, \cdots, I_{*x} X_n). \end{aligned}$$

此外，由I是浸入，对任何$Y \in T_{I(x)}(R^{n+1})$，存在$X \in T_x(M)$，有形式

$$Y = I_{*x} X + \lambda N(x) \quad (\lambda \in R)$$

因此，对任意向量

$$Y_i = I_{*x} X_i + \lambda_i N(x) \in T_{I(x)}(R^{n+1}) \quad (1 \leqslant i \leqslant n),$$

有

$$\begin{aligned} \mu(I(x))(Y_1, \cdots, Y_n) &= \mu(I(x))(I_{*x} X_1 + \lambda_1 N(x), \cdots, \\ &\qquad I_{*x} X_n + \lambda_n N(x)) \\ &= \mu(I(x))(I_{*x} X_1, \cdots, I_{*x} X_n) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mu(I(x))(I_{*x} X_1, \cdots, I_{*x} X_{i-1}, N(x), \\ &\qquad I_{*x} X_{i+1}, \cdots, I_{*x} X_n) \\ &\quad + \text{其它项} \\ &= 0 + 0 + 0 = 0. \end{aligned}$$

其它项为0，这是因为$N(x)$出现两次，而μ是反称的；第二部分

为 0，是因为

$$\mu(I(x))(\cdots,N(x),\cdots)=dx^1\wedge\cdots\wedge dx^{n+1}(N(x),\cdots,N(x),\cdots)=0.$$

由于 $Y_1,\cdots,Y_n\in T_{I(x)}(R^{n+1})$ 是任意的，所以 $\mu(I(x))=0$.

但是，

$$\mu(I(x))\left(\frac{\partial}{\partial x^1},\cdots,\frac{\hat{\partial}}{\partial x^i},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^{n+1}}\right)=dx^1\wedge\cdots$$

$$\wedge dx^{n+1}\left(N(x),\frac{\partial}{\partial x^1},\cdots,\frac{\hat{\partial}}{\partial x^i},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^{n+1}}\right)$$

$$=dx^1\wedge\cdots\wedge dx^{n+1}\left(\sum_{i=1}^{n+1}(N(x)x^i)\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^1},\cdots,\frac{\hat{\partial}}{\partial x^i},\cdots,\right.$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^{n+1}}\right)=(-1)^{i-1}(N(x)x^i)dx^1\wedge\cdots\wedge dx^{n+1}\left(\frac{\partial}{\partial x^1},\cdots,\right.$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^i},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^{n+1}}\right)=(-1)^{i-1}(N(x)x^i),$$

$$\mu(I(x))=\sum_{i=1}^{n+1}(-1)^{i-1}(N(x)x^i)dx^1\wedge\cdots\wedge\widehat{dx^i}\wedge\cdots\wedge dx^{n+1},$$

因为 $N(x)\neq 0$，所以存在 i_0，$N(x)x^{i_0}\neq 0$，$\mu(I(x))\neq 0$. 这就推出了矛盾. #

定理 3 设$(M,\mathscr{D})$是 R^{n+1} 的 n 维 C^∞子流形，如果在 M 上有一个处处非 0 的"连续法向量场"，即存在一个 C^0（连续）映射 $N:M\to T(R^{n+1})$，使得对每个 $x\in M$，$N(x)$是在 $T_{I(x)}(R^{n+1})$ 内垂直于 $I_{*x}(T_x(M))$的一个非 0 向量. 则M是可定向的.

证明 设 $\{x^i|i=1,\cdots,n+1\}$ 是 R^{n+1} 中的通常坐标，取M的连通的局部坐标系

(U_1,φ_1)，$\{u^i|i=1,\cdots,n\}$和 (U_2,φ_2)，$\{v^i|i=1,\cdots,n\}$，使

得$\left(\frac{\partial}{\partial u^i}=I_*\left(\frac{\partial^*}{\partial u^i}\right)\right)$

$$\overrightarrow{\left[\frac{\partial}{\partial u^1},\cdots,\frac{\partial}{\partial u^n},N\right]}=\overrightarrow{\left[\frac{\partial}{\partial x^1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^{n+1}}\right]}$$

（只要有一点满足此式，则由 U_1 连通、N 连续和零值定理推出此式在 U_1 中都成立）和

$$\overrightarrow{\left[\frac{\partial}{\partial v^1},\cdots,\frac{\partial}{\partial v^n},N\right]}=\overrightarrow{\left[\frac{\partial}{\partial x^1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^{n+1}}\right]},$$

则当 $U_1\cap U_2\neq\phi$ 时，在 $U_1\cap U_2$ 中有

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial v^1}\\ \vdots\\ \frac{\partial}{\partial v^n}\\ N\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial u^1}{\partial v^1} & \cdots & \frac{\partial u^n}{\partial v^1} & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{\partial u^1}{\partial v^n} & \cdots & \frac{\partial u^n}{\partial v^n} & 0\\ 0 & \cdots & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial u^1}\\ \vdots\\ \frac{\partial}{\partial u^n}\\ N\end{pmatrix},$$

其中

$$\det\begin{pmatrix}\frac{\partial u^1}{\partial v^1} & \cdots & \frac{\partial u^n}{\partial v^1} & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \vdots\\ \frac{\partial u^1}{\partial v^n} & \cdots & \frac{\partial u^n}{\partial v^n} & 0\\ 0 & \cdots & 0 & 1\end{pmatrix}>0,$$

即

$$\frac{\partial(u^1,\cdots,u^n)}{\partial(v^1,\cdots,v^n)}>0.$$

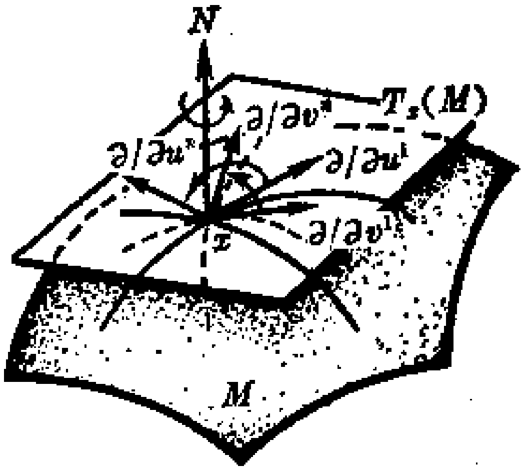


图 60

所以

$$\mathscr{D}_1=\left\{(U,\varphi),\{u^i\}\,\middle|\,\overrightarrow{\left[\frac{\partial}{\partial u^1},\cdots,\frac{\partial}{\partial u^n},N\right]}=\overrightarrow{\left[\frac{\partial}{\partial x^1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^{n+1}}\right]}\right\}$$

是M的一个定向，因而M是可定向的(参看图 60)。 #

注 $\mathscr{D}_2=\left\{(U,\rho_{反}\circ\varphi),\{v^i\}\,\middle|\,\overrightarrow{\left[\frac{\partial}{\partial v^1},\cdots,\frac{\partial}{\partial v^n},N\right]}\right.$

$\left.=-\overrightarrow{\left[\frac{\partial}{\partial x^1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^{n+1}}\right]}\right\}$是$M$的另一定向.

例 2 设$(M,\mathscr{D})$是 R^n 的 1 维 C^∞ 子流形. 如果它有连续的处处非 0 的切向量场 X,则M是可定向的.

事实上,设$\{x^i|i=1,\cdots,n\}$是 R^n 的通常坐标,取M的连通的局部坐标系$(U_1,\varphi_1),\{t\}$和$(U_2,\varphi_2),\{\theta\}$,使得

$$\frac{\partial}{\partial t}=\sum_{i=1}^{n}\frac{dx^i}{dt}\frac{\partial}{\partial x^i}\ \left(相当于通常的\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\frac{dx^i}{dt}e_i\right)$$

和

$$\frac{\partial}{\partial\theta}=\sum_{i=1}^{n}\frac{dx^i}{d\theta}\frac{\partial}{\partial x^i}\ \left(相当于通常的\frac{d\boldsymbol{r}}{d\theta}=\sum_{i=1}^{n}\frac{dx^i}{d\theta}e_i\right)$$

都与 X 同向(只要有一点同向,必在 U_1 或 U_2 中与 X 同向).

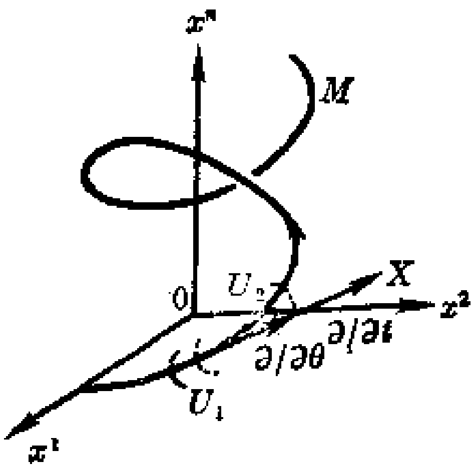


图 61

不妨设$\frac{dx^1}{dt}\neq 0$,因而$\frac{dx^1}{d\theta}\neq 0$,于是$\frac{dx^1}{dt}$和$\frac{dx^1}{d\theta}$同号. 所以在 $U_1\cap U_2$ 中有

$$\frac{dt}{d\theta}=\frac{dt}{dx^1}\cdot\frac{dx^1}{d\theta}=\frac{\dfrac{dx^1}{d\theta}}{\dfrac{dx^1}{dt}}>0,$$

这就立即推出了

$$\mathscr{D}_1=\left\{(U,\varphi),\{t\}\,\middle|\,\frac{\partial}{\partial t}与X同向\right\}$$

是M的一个定向,因而M是可定向的(参看图 61).

容易看出,$\mathscr{D}_2=\left\{(U,\rho_{反}\circ\varphi),\{\theta\}\,\middle|\,\frac{\partial}{\partial\theta}与-X同向\right\}$是$M$的另一个定向.

例 3 设$(M,\mathscr{D})$是 n 维 C^∞流形，如果存在 M 上的整体的坐标$\{x^i\}$，则 M 是可定向的。

特别是 R^n 和 R^n 中的开集都是可定向的。

事实上，$\mathscr{D}_1=\left\{(U,\varphi),\{y^i\}\left|\frac{\partial(x^1,\cdots,x^n)}{\partial(y^1,\cdots,y^n)}>0\right.\right\}$ 是 M的一个定向，而

$$\mathscr{D}_2=\left\{(U,\rho_{反}\circ\varphi),\{z^i\}\left|\frac{\partial(x^1,\cdots,x^n)}{\partial(z^1,\cdots,z^n)}<0\right.\right\}$$

是M的另一个定向。

例 4 设$(M,\mathscr{D})$是 n 维 C^∞流形，如果存在 M 上的整体 C^0（连续）基向量场$\{X_i|i=1,\cdots,n\}$，则 M 是可定向的。

事实上，$\mathscr{D}_1=\left\{(U,\varphi),\{x^i\}\left|\overrightarrow{\left[\frac{\partial}{\partial x^1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^n}\right]}=\right.\right.$

$\left.\overrightarrow{[X_1,\cdots,X_n]}\right\}$是$M$的一个定向。而

$$\mathscr{D}_2=\left\{(U,\rho_{反}\circ\varphi),\{y^i\}\left|\overrightarrow{\left[\frac{\partial}{\partial y^1},\cdots,\frac{\partial}{\partial y^n}\right]}=-\overrightarrow{[X_1,\cdots,X_n]}\right.\right\}$$

是M的另一定向。

显然，例 3 中$\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\left|i=1,\cdots,n\right.\right\}$是 M 上的整体 C^∞基向量场，因而它是例 4 的特例。但是反之并不成立，例如 S^1。

例 5 $S^n=\{(x^1,\cdots,x^{n+1})\in R^{n+1}|(x^1)^2+\cdots+(x^{n+1})^2=1\}$是可定向的。

容易验证$X=\sum\limits_{i=1}^{n+1}x^i\frac{\partial}{\partial x^i}$是 S^n 上的 C^∞ 单位法向量场（参看第二章§4.2 例 4）。由定理 2 或定理 3 可知 S^n 是可定向的。

例 6 设 P^n 是 n 维射影空间，则当且仅当 n 为奇数时是可

定向的。

设 $p: S^n \to P^n$,

$$p(x)=p(-x),$$

是覆盖映射。而 ω 为定理 2 的证明中所构造的 S^n 上的一个处处非 0 的 n 阶 C^∞ 微分形式。如果 n 是奇数，则在 P^n 上恰有一个 $C^\infty n$ 阶微分形式 $\tilde{\omega}$ 使得 $\omega=p^*\tilde{\omega}$(一般映射并不成立!)，因此 P^n 是可定向的。如果 n 是偶数，则 P^n 是不可定向的。(反证)若 P^n 是可定向的，则应存在 P^n 上的一个处处非 0 的 n 阶 C^∞ 微分形式 $\tilde{\omega}$，则 $p^*\tilde{\omega}=g\omega$，$g$ 处处非 0. 另一方面，若 $x\in S^n$，则

$$g(x)>0 \Longleftrightarrow g(-x)<0,$$

由连续函数的零值定理，必有 $\xi\in S^n$，使 $g(\xi)=0$，这与 g 处处不为 0 相矛盾。

例 7 如果 Möbius 带作为 R^3 的 C^∞ 正则子流形 $(M, \mathscr{D})$(例如习题 14 所指出的)，则是不可定向的。

如果$(M, \mathscr{D})$是可定向的，$\mathscr{D}_1$ 是一个定向。设 (U,φ)，$\{u^1, u^2\}\in\mathscr{D}_1$，$(V,\psi)$，$\{v^1,v^2\}\in\mathscr{D}_1$。我们令

$$N_U=\frac{\dfrac{\partial}{\partial u^1}\times\dfrac{\partial}{\partial u^2}}{\left|\dfrac{\partial}{\partial u^1}\times\dfrac{\partial}{\partial u^2}\right|},\quad N_V=\frac{\dfrac{\partial}{\partial v^1}\times\dfrac{\partial}{\partial v^2}}{\left|\dfrac{\partial}{\partial v^1}\times\dfrac{\partial}{\partial v^2}\right|}.$$

则

$$\overrightarrow{\left[\frac{\partial}{\partial u^1},\frac{\partial}{\partial u^2},N_U\right]}=\overrightarrow{\left[\frac{\partial}{\partial x^1},\frac{\partial}{\partial x^2},\frac{\partial}{\partial x^3}\right]}=\overrightarrow{\left[\frac{\partial}{\partial v^1},\frac{\partial}{\partial v^2},N_V\right]},$$

$$\begin{pmatrix}\dfrac{\partial}{\partial u^1}\\ \dfrac{\partial}{\partial u^2}\\ N_U\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial v^1}{\partial u^1} & \dfrac{\partial v^2}{\partial u^1} & 0\\ \dfrac{\partial v^1}{\partial u^2} & \dfrac{\partial v^2}{\partial u^2} & 0\\ 0 & 0 & e\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dfrac{\partial}{\partial v^1}\\ \dfrac{\partial}{\partial v^2}\\ N_V\end{pmatrix},$$

$\varepsilon=\pm 1$，由$\dfrac{\partial(v^1,v^2)}{\partial(u^1,u^2)}>0$ 推出 $\varepsilon=1$，所以它确定了一个 M 上的 C^∞(当然是连续的)单位法向量场N. 但是,这样的场沿中心线连续变化时，在走完一周后，它将指向相反方向. 这就推出了矛盾(参看图 62).

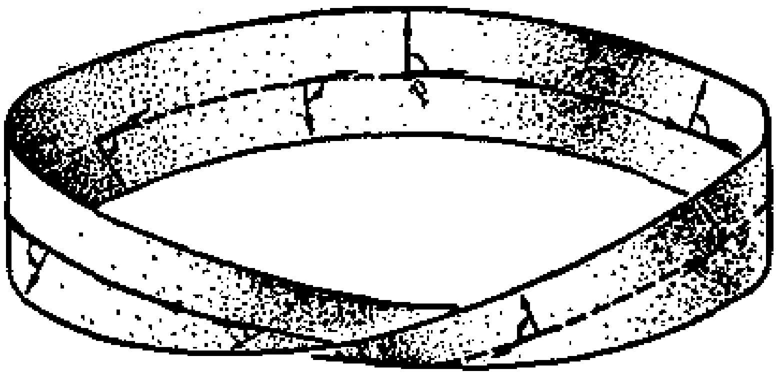


图 62 Möbius 带

直观地,我们可以作一个 Möbius 带的纸模型，纸的两面(纸有厚度)可以认为是两个方向上的单位法向量的端点. 可以看出，如果一面开始涂上颜色,则最后都涂上了颜色. 换句话说,在一个点任意地选择单位法向量 $N(x)$,则由法向量的连续性要求,终于在初始点上迫使为相反方向的法向量$-N(x)$.

定义 2 设$(M_1,\mathscr{D}_1)$和$(M_2,\mathscr{D}_2)$都是 n 维 C^∞定向流形，它们的定向分别为 $\mathscr{D}'_1$ 和 $\mathscr{D}'_2$,或者用 μ 和 ν 来表示. 如果存在C^∞微分同胚

$$F: M_1\to M_2,$$

使得

$$\mathscr{D}'_1=\{(U,\varphi)\},\qquad \mathscr{D}'_2=\{(F(U),\varphi\circ F^{-1}\}.$$

或者

$$F_*\mu=\nu,$$

即对任何 $p\in M_1$,若$\overrightarrow{[X_1,\cdots,X_n]}_p=\mu_p$ ($\{X_i\}$ 为 $T_p(M_1)$ 的一个基),则有

$\overrightarrow{[F_*X_1,\cdots,F_*X_n]}_{F(p)}=\nu_{F(p)}$(显然$\{F_*X_i\}$为$T_{F(p)}(M_2)$的一个基)，则称$F$为**保留定向的映射**.

6.1 习　　题

1. 在$[e'_1,\cdots,e'_n]\sim[e_1,\cdots,e_n]$中，证明$\sim$满足等价关系的三个条件.

2. 设$(M,\mathscr{D})$是C^∞的n维流形，$\mathscr{D}'_1$和$\mathscr{D}'_2$为满足定义1中的(1°)和(2°)，而$\mathscr{D}_1$和$\mathscr{D}_2$分别是由$\mathscr{D}'_1$和$\mathscr{D}'_2$确定的定向. 则

$\mathscr{D}_1=\mathscr{D}_2\Longleftrightarrow\mathscr{D}'_1$的元素和$\mathscr{D}'_2$的元素都满足定义1中的条件(2°).

3. 不连通的可定向流形恰有两个定向吗？

4. 证明C^∞流形的可定向(或不可定向)的性质在C^∞微分同胚下是不变的.

5. 设$(M_1,\mathscr{D}_1)$和$(M_2,\mathscr{D}_2)$都是n维C^∞流形，$F: M_1\to M_2$是C^∞微分同胚. $\{X_i\}$和$\{X'_i\}$都是$T_p(M_1)$的基，且

$$\overrightarrow{[X_1,\cdots,X_n]}=\overrightarrow{[X'_1,\cdots,X'_n]},$$

证明 $\overrightarrow{[F_{*p}X_1,\cdots,F_{*p}X_n]}=\overrightarrow{[F_{*p}X'_1,\cdots,F_{*p}X'_n]}$.

6. 证明例4中的$\mathscr{D}_1$确实是一个定向. 条件“C^0(连续)”用在何处？

7. 设$\{X_i(t)\}$是$T_p(M)$的基，$X_i(t)$关于t连续$(0\leqslant t\leqslant 1)$，证明

$$\overrightarrow{[X_1(0),\cdots,X_n(0)]}=\overrightarrow{[X_1(1),\cdots,X_n(1)]}.$$

8. 设$F_j: U\to R$是C^∞的，其中U是R^n中的开集，且

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix}\dfrac{\partial F_1}{\partial x^1}&\cdots\cdots&\dfrac{\partial F_1}{\partial x^n}\\ \cdots&\cdots\ \cdots&\cdots\\ \dfrac{\partial F_{n-k}}{\partial x^1}&\cdots&\dfrac{\partial F_{n-k}}{\partial x^n}\end{pmatrix}=n-k$$

从第二章2.3例5可知，由方程组

$$\begin{cases}F_1(x^1,\cdots,x^n)=c^1,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ F_{n-k}(x^1,\cdots,x^n)=c^{n-k},\end{cases}\qquad(c^i\text{是常数})$$

确定了一个k维C^∞流形M，证明M是可定向的.

(提示：参看定理 3 的证明。)

9. 证明 C^∞Lie 群 G 是可定向的。

10. 设$(M,\mathscr{D})$是 n 维 C^∞ 流形，证明切丛$(T(M),\mathscr{D}^*)$是可定向的（注意：M不必是可定向的！）。

11. 用尽可能多的方法证明：R^3中的球面、圆柱面、平面和 R^2 中的圆都是可定向的。

证明 $S^1\times S^1$ 是可定向的。

12*. (1°) 证明

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & -b_{11} & a_{12} & -b_{12} & a_{1n} & -b_{1n} \\ b_{11} & a_{11} & b_{12} & a_{12} & b_{1n} & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & -b_{n1} & a_{n2} & -b_{n2} & a_{nn} & -b_{nn} \\ b_{n1} & a_{n1} & b_{n2} & a_{n2} & b_{nn} & a_{nn} \end{pmatrix}\geqslant 0.$$

(2°) 如果将 n 维复解析流形用自然的方法视作 $2n$ 维实解析流形，证明它是可定向的。

13. 设$(M_1,\mathscr{D}_1)$和$(M_2,\mathscr{D}_2)$分别是 m 维和 n 维 C^∞的可定向流形，证明$(M_1\times M_2,\mathscr{D}_1\times\mathscr{D}_2)$是可定向的。

14. 设 F: $[0,2\pi]\times(-1,1)\to R^3$是由

$$F(u,v)=\left(2\cos u+v\sin\left(\frac{u}{2}\right)\cos u, 2\sin u\right.$$
$$\left.+v\sin\left(\frac{u}{2}\right)\sin u, v\cos\frac{u}{2}\right)$$

给出的。证明

(1°) $F([0,2\pi]\times(-1,1))$是 Möbius 带 M。

(2°) M是 R^3的 2 维 C^∞正则子流形。

(3°) 沿 Möbius 带的中心线 $v=0$,法向量连续变化，在走完一周后，它将指向相反方向，通过计算验证之。由此推出 Möbius 带是不可定向的。

(4°) M不能 C^∞嵌入到 R^2 中。

15. 设$(M,\mathscr{D})$是 R^3中的 2 维 C^∞ 可定向的正则子流形，证明M上必有整体的 C^∞法向量场(参看例 7)。

能否将此结果推广到 R^n 中的 $n-1$ 维 C^∞可定向的正则子流形$(M,\mathscr{D})$

的情形?

6.2 ∂M 的诱导定向

1. R^{n-1}的诱导定向

设 R^n 和R^{n-1}的自然定向分别为

$$\overrightarrow{[e_1,\cdots,e_n]}\text{和}\overrightarrow{[e_1,\cdots,e_{n-1}]}.$$

我们称$(-1)^n\overrightarrow{[e_1,\cdots,e_{n-1}]}$为$\overrightarrow{[e_1,\cdots,e_n]}$在 R^{n-1}上的**诱导定向**.

显然, $\overrightarrow{[\overrightarrow{(-1)^n e_1,\cdots,e_{n-1}}],\quad (-1)^n e_n]}=\overrightarrow{[e_1,\cdots,e_n]}$.

$n=2$,诱导定向 $(-1)^2\overrightarrow{[e_1]}=\overrightarrow{[e_1]}$.

$n=3$,诱导定向 $(-1)^3\overrightarrow{[e_1,e_2]}=\overrightarrow{[e_2,e_1]}$(参看图 63).

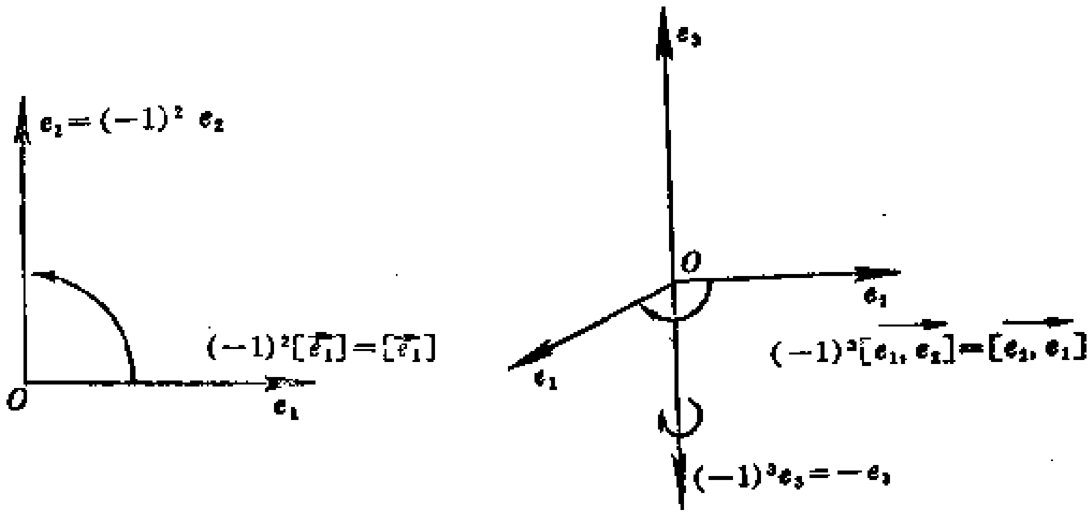


图 63

2. ∂M 的诱导定向

定理 1 设$(W,\mathscr{D})$是 n 维 C^∞可定向的流形,定向为 $\mathscr{D}_1$,而$(M,\mathscr{D}')$是$(W,\mathscr{D})$的开子流形,

$\partial M=\{M$ 在 W 中的边界点$\}$

(注意:这与某些书中的带边流形的∂M 有区别!). 于是有

(1°) M是可定向的.

(2°) 如果对任何 $p\in\partial M$(非空)，存在一个含 p 的坐标邻域 $(U,\varphi),\{x^i\}$，使得

$$\begin{aligned}\varphi(M\cap U)&=\varphi(U)\cap\{x\mid x^n>0\},\\ \varphi(\partial M\cap U)&=\varphi(U)\cap\{x\mid x^n=0\},\end{aligned}\tag{1}$$

则 ∂M 是 $n-1$ 维 C^∞ 正则子流形，并且 ∂M 也是可定向的.

证明 (1°) 设 $\mathscr{D}_1=\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}$，显然 $\mathscr{D}_1'=\{(M\cap U_\alpha,\varphi_\alpha|_M)\}$ 是 M 的一个定向.

(2°) 设 $\mathscr{D}_2=\{(U,\varphi),\{x^i\}\mid(U,\varphi)\in\mathscr{D}_1$，且满足 (1)式$\}$. 如果 $(U_\alpha,\varphi_\alpha),\{x^i\}\in\mathscr{D}_2,(U_\beta,\varphi_\beta),\{y^i\}\in\mathscr{D}_2$，则在 $U_\alpha\cap U_\beta$ 中

$$\overrightarrow{\left[\frac{\partial}{\partial x^1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^n}\right]}=\overrightarrow{\left[\frac{\partial}{\partial y^1},\cdots,\frac{\partial}{\partial y^n}\right]},$$

所以由 $y^n=y^n(x^1,\cdots,x^{n-1},0)\equiv0$，推出

$$\frac{\partial(y^1,\cdots,y^{n-1})}{\partial(x^1,\cdots,x^{n-1})}\cdot\frac{\partial y^n}{\partial x^n}\bigg|_{x^n=0}$$

$$=\det\begin{pmatrix}\frac{\partial y^1}{\partial x^1}&\cdots&\frac{\partial y^{n-1}}{\partial x^1}&0\\ \cdots&\cdots&\cdots&\vdots\\ \frac{\partial y^1}{\partial x^{n-1}}&\cdots&\frac{\partial y^{n-1}}{\partial x^{n-1}}&0\\ \frac{\partial y^1}{\partial x^n}&\cdots&\frac{\partial y^{n-1}}{\partial x^n}&\frac{\partial y^n}{\partial x^n}\end{pmatrix}_{x^n=0}>0.$$

从 $\frac{\partial y^n}{\partial x^n}\Big|_{x^n=0}\geqslant0$ (留作习题)可以得到

$$\frac{\partial(y^1,\cdots,y^{n-1})}{\partial(x^1,\cdots,x^{n-1})}\bigg|_{x^n=0}>0$$

于是

$$\{(\partial M\cap U,\varphi|_{\partial M\cap U})\mid(U,\varphi)\in\mathscr{D}_2\}$$

确定了 ∂M 的一个定向，因而 ∂M 是可定向的 (参看图 64). #

定义 1 在定理1的$\{(\partial M\cap U,\varphi|_{\partial M\cap U})\mid(U,\varphi)\in\mathscr{D}_2\}$中，由

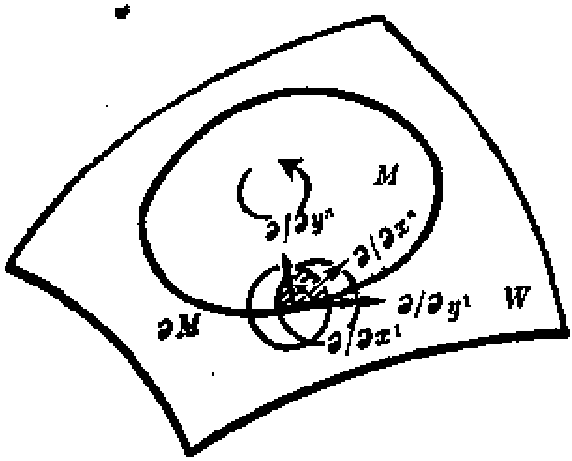


图 64

$\left\{(-1)^n\overrightarrow{\left[\dfrac{\partial}{\partial x^1},\cdots,\dfrac{\partial}{\partial x^{n-1}}\right]}\right\}$所确定的 ∂M 的定向称为由 M 的定向 μ(或 $\mathscr{D}_1'$)决定的 ∂M 的诱导定向,并记为 $\partial\mu$。

例 1 $W=R^2$, M 为 R^2 的开子流形, ∂M 为满足定理条件的 C^∞ 曲线(参看图 65)。

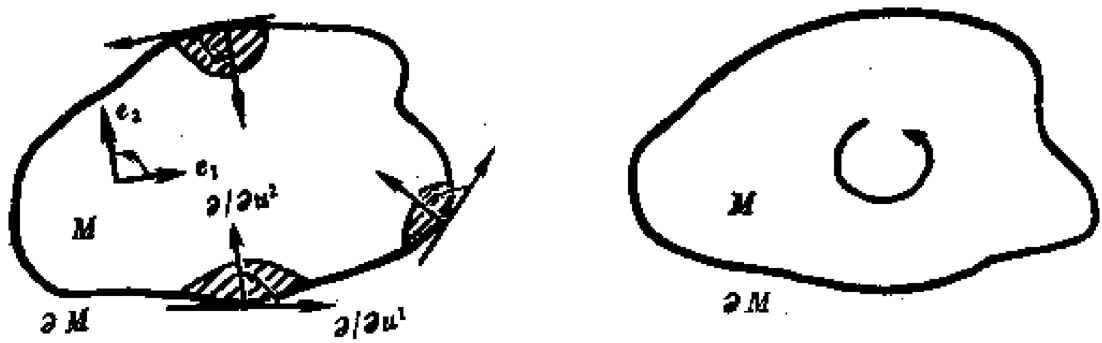


图 65

例 2 $W=R^3$ 中的 2 维 C^∞ 流形, M 为 W 的开子流形, ∂M 为满足定理条件的 C^∞ 曲线(参看图 66)。

例 3 $W=R^3$, M 为 R^3 中的开单位球, $\partial M=S^2$ 为满足定理条件的 2 维 C^∞ 流形(曲面)(参看图 67)。如 $(u^1, u^2, u^3)=(\varphi, \theta, -r)$。

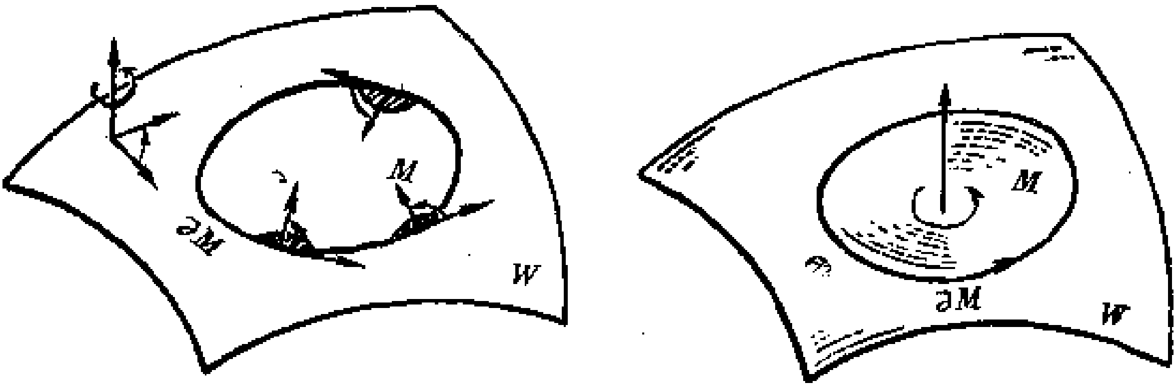


图 66

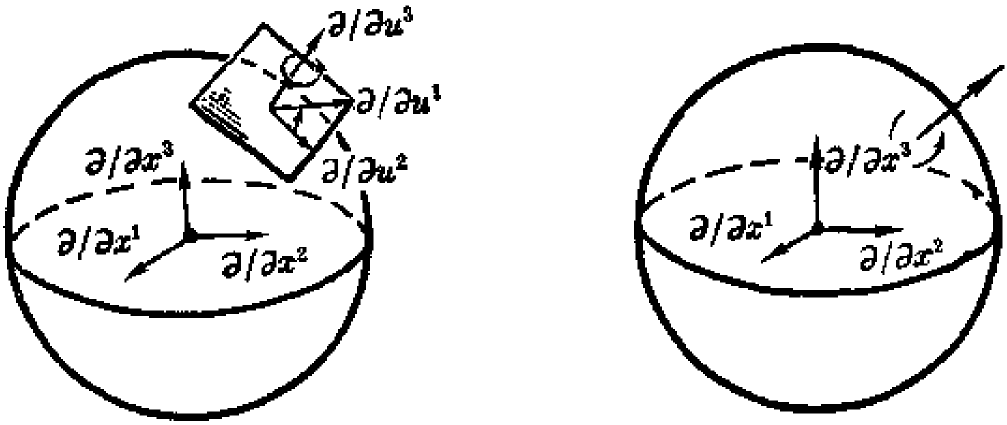


图 67

6.2 习　题

1．证明定理 1 中的$\left.\frac{\partial y^n}{\partial x^n}\right|_{x^n=0}\geqslant 0,\left.\frac{\partial y^n}{\partial x^n}\right|_{x^n=0}>0$．

2．(1°) 设 $W=R^2$ 是通常的 C^∞ 正定向流形，$M=\{(x,y)\mid 1<x^2+y^2<4\}$，$\partial M=\{(x,y)\mid x^2+y^2=1$ 或 $x^2+y^2=4\}$，用图形表示 M 的定向和 ∂M的诱导定向．

(2°) 设 $W=S^2$，它的定向由外法向所确定(参看图 67)，

$$M_1=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2=1,z>0\},$$

$$M_2=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2=1,z<0\}.$$

求 ∂M_1 和 ∂M_2。用图形表示 M_1、M_2 的定向和 ∂M_1、∂M_2的诱导定向。

(3°) 设 $W=R^3$ 是通常的 C^∞正定向流形，

$$M=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2<1\}.$$

求 ∂M。并用图形表示 M 的定向和 ∂M 的诱导定向.

(4°) 设 $W=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2=1\}$ 是由它的外法向确定的定向流形，$M=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2=1, 0<z<1\}$，求 ∂M。并用图形表示 M 的定向和 ∂M 的诱导定向.

(5°) 设 $W=R^n$，$M=R^n$，求 ∂M.

3. 设 $W=R^2$ 是通常的 C^∞ 的正向流形，$M=\{(x,y)\mid x^2+y^2<1$ 或 $1<x^2+y^2<4\}$.

求 ∂M。虽然 ∂M 是 C^∞正则子流形，但不满足定理 1 中的条件(1)，为什么？

求 M 的定向。问能否得到 ∂M 的诱导定向？

4. 设 $W=R^2$ 是通常的 C^∞正向流形，M 是开单位圆中挖去两个不相交的闭小圆片。用图形表示 ∂M 的诱导定向.

§ 7 Stokes 定理

1. $\int_{\vec{M}}\omega$

定义 1 设 U 是 R^n 中的开集，$\{x^i\}$ 是 R^n 的通常的整体坐标，由 $\overrightarrow{\left[\frac{\partial}{\partial x^1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^n}\right]}$ 确定了 U 的一个正定向，记此定向流形为 $\vec{U}^+$，而由 $-\overrightarrow{\left[\frac{\partial}{\partial x^1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^n}\right]}$ 确定的定向流形为 $-\vec{U}^+$.

设 f 是 U 上的实函数，我们定义

$$\int_{\varepsilon\vec{U}^+} f\,dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n=\varepsilon\int_U f\,dx^1\cdots dx^n,$$

这里 $\varepsilon=\pm1$，且右边的通常的 Riemann 积分假定是存在的.

下面我们假定$(W,\mathscr{D})$是 n 维 C^r 的仿紧的可定向流形，由第二章§3 定理 4 可知，至少存在一个 W 的坐标邻域的局部有限的

开覆盖$\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}$，而$\{g_\alpha\}$是附属于它的广义 1 的分解.

设 M 是 W 的开集，∂M 满足第二章§6.2 定理 1(2°)中条件或者是空集，$M\cup\partial M$ 是紧致的. 记由定向流形$\vec{W}$诱导出 M 的定向流形为 $\vec{M}$ 而由 ∂M 的诱导定向决定的定向流形为$\overrightarrow{\partial M}$.

因为 $M\cup\partial M$ 紧致，所以只有有限个 U_α 与 $M\cup\partial M$ 相交(留作习题).

定义 2 设 ω 是 W 上的 $C^\infty n$-形式，在局部坐标系$(U_\alpha,\varphi_\alpha)$，$\{x^i\}$中，

$$\omega=a_\alpha(x^1,\cdots,x^n)dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n,$$

于是我们定义

$$\int_{\vec{M}}\omega=\sum_\alpha\int_{\vec{M}}g_\alpha\omega$$

$$=\sum_\alpha\int_{\varphi_{\alpha*}\overrightarrow{(M\cap U_\alpha)}}(g_\alpha\circ\varphi_\alpha^{-1})\cdot a_\alpha dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n$$

$$=\sum_\alpha\int_{\varphi_{\alpha*}\overrightarrow{(M\cap U_\alpha)}}(g_\alpha\circ\varphi_\alpha^{-1})\cdot(\varphi_\alpha^{-1})^*\omega.$$

(由于 $M\cap\partial M$ 紧致，因此上式中，求和号只有有限项不为 0. 再由 ω 在 W 上是 C^∞的，Supp g_α 和 $M\cup\partial M$ 是紧致的，可以看出，上式右边的积分是存在的.)

引理 1 积分 $\int_{\vec{M}}\omega$ 的定义与 W 的坐标邻域的局部有限的开覆盖和附属于它的广义 1 的分解的选取无关.

证明 设 $\{(V_\beta,\psi_\beta)\}$ 是另一个 W 的坐标邻域的局部有限的开覆盖，而$\{f_\beta\}$是附属于它的广义 1 的分解. 在局部坐标系 $(U_\alpha,\varphi_\alpha)$，$\{x^i\}$和$(V_\beta,\psi_\beta)$，$\{y^i\}$中，

令

$$\omega=a_\alpha dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n=b_\beta dy^1\wedge\cdots\wedge dy^n\ (\text{在 } U_\alpha\cap U_\beta \text{ 中}),$$

于是

$$b_\beta=\frac{\partial(x^1,\cdots,x^n)}{\partial(y^1,\cdots,y^n)}a_\alpha,$$

$$\sum_\alpha\int_{\varphi_{\alpha_*}\overrightarrow{(M\cap U_\alpha)}}(g_\alpha\circ\varphi_\alpha^{-1})\cdot a_\alpha dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n$$

$$=\sum_\alpha\sum_\beta\int_{\varphi_{\alpha_*}\overrightarrow{(M\cap U_\alpha)}}(g_\alpha\circ\varphi_\alpha^{-1})\cdot(f_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1})$$

$$a_\alpha dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n$$

$$=\sum_\alpha\sum_\beta\int_{\varphi_{\alpha_*}\overrightarrow{(M\cap U_\alpha\cap V_\beta)}}(g_\alpha\circ\varphi_\alpha^{-1})\cdot(f_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1})$$

$$a_\alpha dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n$$

$$=\sum_\beta\sum_\alpha\int_{\psi_{\beta_*}\overrightarrow{(M\cap V_\beta\cap U_\alpha)}}(g_\alpha\circ\psi_\beta^{-1})$$

$$\cdot(f_\beta\circ\psi_\beta^{-1})b_\beta dy^1\wedge\cdots\wedge dy^n$$

$$=\sum_\beta\sum_\alpha\int_{\psi_{\beta_*}\overrightarrow{(M\cap V_\beta)}}(g_\alpha\circ\psi_\beta^{-1})\cdot(f_\beta\circ\psi_\beta^{-1})$$

$$b_\beta dy^1\wedge\cdots\wedge dy^n$$

$$=\sum_\beta\int_{\psi_{\beta_*}\overrightarrow{(M\cap V_\beta)}}(f_\beta\circ\psi_\beta^{-1})b_\beta dy^1\wedge\cdots\wedge dy^n.$$

(因为求和号中只有有限项不为 0，所以和号可交换. 其中第三个等式是将它们化为通常的 Riemann 积分，然后用通常的变量代换公式得到.)

引理 2 设 ω,ω_1,ω_2，是$(W,\mathscr{D})$上的 $C^\infty n$-形式，$\lambda\in R$，则

(1°) $\int_{\overrightarrow{-M}}\omega=-\int_{\overrightarrow{M}}\omega.$

(2°) $\int_{\overrightarrow{M}}\lambda\omega=\lambda\int_{\overrightarrow{M}}\omega.$

(3°) $\int_{\overrightarrow{M}}(\omega_1+\omega_2)=\int_{\overrightarrow{M}}\omega_1+\int_{\overrightarrow{M}}\omega_2$.

(4°) 如果 M_1 和 M_2 是 W 的不相交的开集，$M=M_1\cup M_2$，$\overrightarrow{M}_1,\overrightarrow{M}_2$ 与 $\overrightarrow{M}$ 的定向一致，$\partial M=\partial M_1\cup\partial M_2,\partial M_1\cap\partial M_2=\phi$，且它们都满足定义 2 前面所叙述的条件．于是有

$$\int_{\overrightarrow{M}}\omega=\int_{\overrightarrow{M_1}}\omega+\int_{\overrightarrow{M_2}}\omega.$$

证明 可从定义 2 立即推出(留作习题)． #

例 1 设 $\overrightarrow{M}_1$ 和 $\overrightarrow{M}_2$ 是 R^n 中的定向开集，

$$F:M_1\to M_2$$

是 C^∞ 微分同胚，$F_*(\overrightarrow{M}_1)=\overrightarrow{M}_2$(即 F 是保留定向的)，

$$\omega=f\,dy^1\wedge\cdots\wedge dy^n$$

是 M_2 上的 $C^\infty n$-形式．

$$F^*\omega=f\frac{\partial(y^1,\cdots,y^n)}{\partial(x^1,\cdots,x^n)}dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n.$$

则有变量代换公式（只对 M_1 和 M_2 连通的情形证明．设 $\overrightarrow{M}_1=\varepsilon\overrightarrow{M}_1^+,\overrightarrow{M}_2=\eta\overrightarrow{M}_2^+,\varepsilon,\eta=\pm1$）：

$$\begin{aligned}\int_{\overrightarrow{M_1}}F^*\omega&=\int_{\overrightarrow{M_1}}f\cdot\frac{\partial(y^1,\cdots,y^n)}{\partial(x^1,\cdots,x^n)}dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n\\&=\int_{\varepsilon\overrightarrow{M_1}}\varepsilon\eta\cdot f\cdot\left|\frac{\partial(y^1,\cdots,y^n)}{\partial(x^1,\cdots,x^n)}\right|dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n\\&=\eta\int_{M_1}f\cdot\left|\frac{\partial(y^1,\cdots,y^n)}{\partial(x^1,\cdots,x^n)}\right|dx^1\cdots dx^n\\&=\eta\int_{M_2}f\,dy^1\cdots dy^n\\&=\int_{\eta\overrightarrow{M_2^+}}f\,dy^1\wedge\cdots\wedge dy^n\\&=\int_{\overrightarrow{M_2}}f\,dy^1\wedge\cdots\wedge dy^n\end{aligned}$$

$$=\int_{\overrightarrow{M_2}}\omega. \qquad \text{（这里的积分都假定存在。）}$$

所以

$$\int_{\overrightarrow{M_1}}F^*\omega=\int_{\overrightarrow{M_2}}\omega,$$

即

$$\int_{\overrightarrow{M_1}} f\frac{\partial(y^1,\cdots,y^n)}{\partial(x^1,\cdots,x^n)}dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n=\int_{\overrightarrow{M_2}}f dy^1\wedge\cdots\wedge dy^n.$$

这比通常的积分变量代换公式

$$\int_{M_1} f\cdot\left|\frac{\partial(y^1,\cdots,y^n)}{\partial(x^1,\cdots,x^n)}\right|dx^1\cdots dx^n=\int_{M_2}f dy^1\cdots dy^n$$

的优越性在于除去了讨厌的绝对值号。

一般地，我们有

定理 1 （变量代换） 设 $M_1,\partial M_1,W_1$ 和 $M_2,\partial M_2$, W_2 分别满足本节开始假定的条件，

$$F: W_1\to W_2$$

是 C^∞ 微分同胚，且 $F_*(\vec{M}_1)=\vec{M}_2$，则

$$\int_{\overrightarrow{M_1}}F^*\omega=\int_{\overrightarrow{M_2}}\omega.$$

证明 设 $\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}$ 是 W_2 的坐标邻域的局部有限的开覆盖，$\{g_\alpha\}$ 是附属于它的广义 1 的分解。则 $\{(F^{-1}(U_\alpha),\varphi_\alpha\circ F)\}$ 是 W_1 的坐标邻域的局部有限的开覆盖，$\{g_\alpha\circ F\}$ 是附属于它的广义 1 的分解（参看图68）。于是我们有

$$\int_{\overrightarrow{M_1}}F^*\omega=\sum_\alpha\int_{\overrightarrow{(\varphi_\alpha\circ F)_*(M_1\cap F^{-1}(U_\alpha))}}(g_\alpha\circ F)\circ(\varphi_\alpha\circ F)^{-1}$$

$$\cdot((\varphi_\alpha\circ F)^{-1})^*(F^*\omega)$$

$$=\sum_\alpha\int_{\overrightarrow{\varphi_{\alpha *}(M_2\cap U_\alpha)}}(g_\alpha\circ\varphi_\alpha^{-1})\cdot(\varphi_\alpha^{-1})^*\omega=\int_{\overrightarrow{M_2}}\omega. \quad \#$$

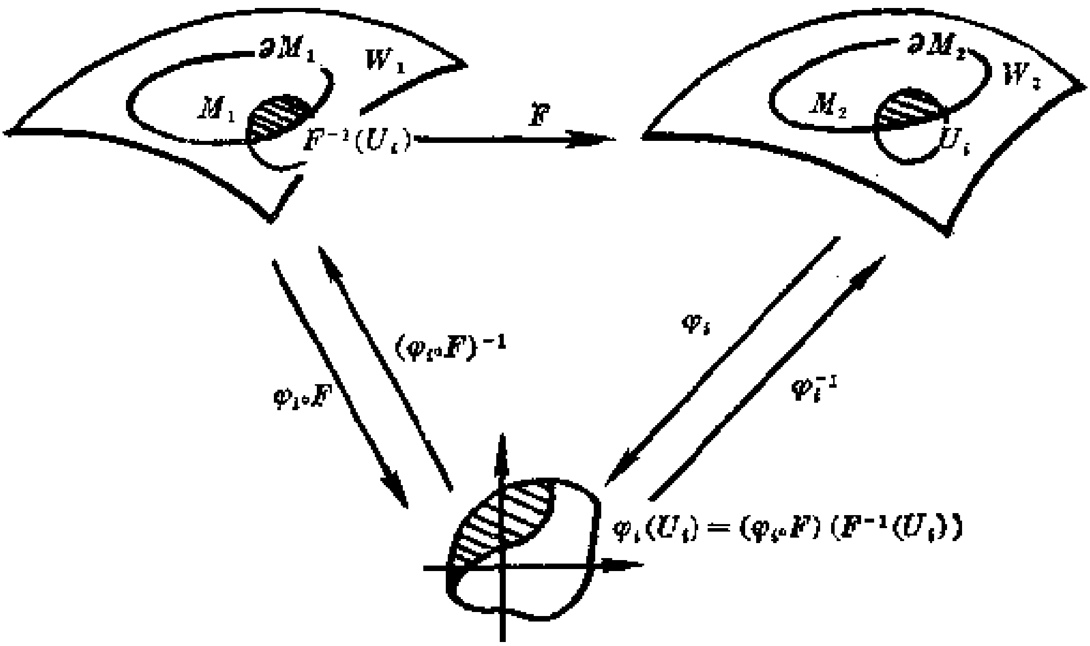


图 68

定理 2 (Stokes) 设$(W,\mathscr{D})$是n维C^∞的σ紧的可定向流形，M是W的开集，∂M满足第二章§6.2定理1（2°）中条件或者是空集，$M\cup\partial M$是紧致的．由定向流形$\overrightarrow{W}$诱导出M的定向流形为$\overrightarrow{M}$，而由∂M的诱导定向决定的定向流形为$\overrightarrow{\partial M}$．$\omega$是$W$的$C^\infty(n-1)$-形式，$I:\partial M\to M$是包含映射．则有

$$\int_{\overrightarrow{M}} d\omega=\int_{\overrightarrow{\partial M}} I^*\omega\left(\text{或}\int_{\overrightarrow{\partial M}}\omega\,|_{\partial M}\right).$$

证明 由题设，并从第二章§3定理2的证明和§6.2定理1，我们可以选取坐标邻域的开覆盖$\{(U_i,\varphi_i)\,|\,i=1,2,\cdots\}$，使得

$$\varphi_i(U_i)=V_1^n,$$

或者$\partial M\cap U_i=\phi$，或者当$\partial M\cap U_i\neq\phi$时，

$$\varphi_i(\partial M\cap U_i)=V_1^n\cap\{x\,|\,x^n=0\}=V_1^{n-1},$$

$$\varphi_i(M\cap U_i)=\varphi_i(U_i)\cap\{x\,|\,x^n>0\}.$$

于是存在W上的一个1的分解$\{g_i\,|\,i=1,2,\cdots\}$，它还诱导了∂M上的一个1的分解$\{g_i|_{\partial M}\,|\,i=1,2,\cdots\}$．从

引理 3 $\int_{\vec{M}} d(g_i\omega) = \int_{\overrightarrow{\partial M}} I^*(g_i\omega).$

可以推出(注意:除有限个外，$g_i|_M \equiv 0$)

$$\int_{\vec{M}} d\omega = \int_{\vec{M}} d\left(\sum_{i=1}^{\infty} g_i\omega\right) = \int_{\vec{M}} \sum_{i=1}^{\infty} d(g_i\omega) = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{\vec{M}} d(g_i\omega)$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \int_{\overrightarrow{\partial M}} I^*(g_i\omega) = \int_{\overrightarrow{\partial M}} I^*\left(\left(\sum_{i=1}^{\infty} g_i\right)\omega\right) = \int_{\overrightarrow{\partial M}} I^*\omega.$$

最后剩下的是

引理 3 的证明 (1°) $\partial M \cap U_i = \phi$.

设(U_i, φ_i)的局部坐标为$\{x^i\}$,

$$g_i\omega = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} a_j dx^1 \wedge \cdots \wedge \hat{d}x^j \wedge \cdots \wedge dx^n,$$

所以

$$d(g_i\omega) = d\left(\sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} a_j dx^1 \wedge \cdots \wedge \hat{dx^j} \wedge \cdots \wedge dx^n\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial a_j}{\partial x^j} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n.$$

由于 $g_i\omega|_{W-\varphi_i^{-1}(V^n_{\frac{1}{2}})} = 0$, 因而 $a_j|_{V^n_1 - V^n_{\frac{1}{2}}} = 0$, 于是 a_j 可延拓为 $[-1,1]^n = \{(x^1,\cdots,x^n) | -1 \leqslant x^i \leqslant 1, i = 1,2,\cdots,n\}$上的$C^\infty$函数，使得 $a_j|_{[-1,1]^n - V^n_{\frac{1}{2}}} = 0$ (参看图 69). 我们可以选取一个特殊的 1 的分解(留作习题),使得下面第一个等式成立.

$$\int_{\vec{M}} d(g_i\omega) = \int_{\overrightarrow{\varphi_{i*}(M \cap U_i)}} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial a_j}{\partial x^j} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$$

$$= \int_{\overrightarrow{eV_1^{n+}}} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial a_j}{\partial x^j} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$$

$$=\varepsilon\sum_{i=1}^{n}\int_{V_1^n}\frac{\partial a_i}{\partial x^i}dx^1\cdots dx^n$$

$$=\varepsilon\sum_{i=1}^{n}\int_{[-1,1]^n}\frac{\partial a_i}{\partial x^i}dx^1\cdots dx^n$$

$$=\varepsilon\sum_{i=1}^{n}\int_{[-1,1]^{n-1}}a_i\Big|_{x^i=-1}^{x^i=1}dx^1\cdots\widehat{dx^i}\cdots dx^n$$

$$=0=\int_{\overrightarrow{\partial M}}0=\int_{\overrightarrow{\partial M}}I^*(g_i\omega).$$

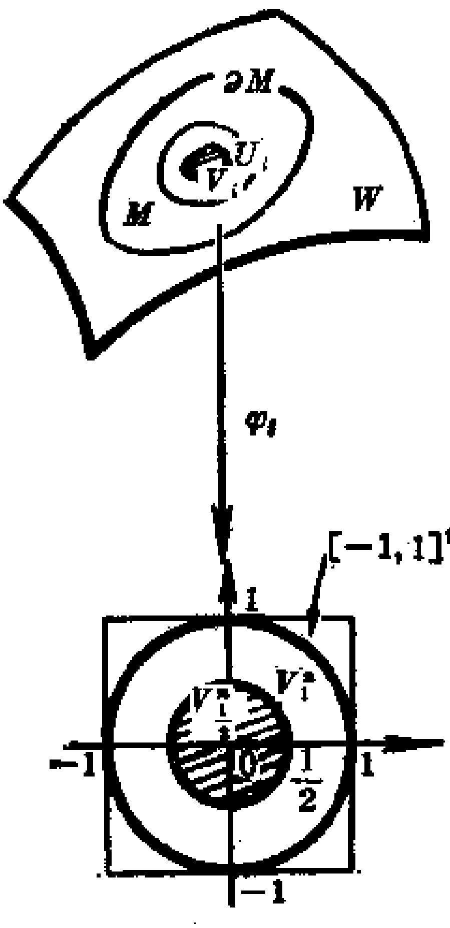


图 69

(2°) $\partial M\cap U_i\neq\phi$.

$$\int_{\overrightarrow{M}}d(g_i\omega)=\int_{\varphi_{i*}(M\cap U_i)}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial a_i}{\partial x^i}dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\int_{\overrightarrow{\varepsilon V_1^n\cap\{x^n>0\}}}\frac{\partial a_i}{\partial x^i}dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n$$

$$=\varepsilon\sum_{i=1}^{n}\int_{V_1^n\cap\{x^n>0\}}\frac{\partial a_i}{\partial x^i}dx^1\cdots dx^n$$

$$=\varepsilon\sum_{i=1}^{n}\int_{[-1,1]^n\cap\{x^n>0\}}\frac{\partial a_i}{\partial x^i}dx^1\cdots dx^n$$

$$=\varepsilon\sum_{i=1}^{n-1}\int_{[-1,1]^{n-1}\cap\{x^n>0\}}a_i\Big|_{x^i=-1}^{x^i=1}dx^1\cdots\widehat{dx^i}\cdots dx^n$$

$$+\varepsilon\int_{[-1,1]^{n-1}}a_n\Big|_{x^n=0}^{x^n=1}dx^1\cdots dx^{n-1}$$

$$=0-\varepsilon\int_{[-1,1]^{n-1}}a_n(x^1,\cdots,x^{n-1},0)dx^1\cdots dx^{n-1}$$

$$=-\varepsilon\int_{V_1^{n-1}}a_n(x^1,\cdots,x^{n-1},0)dx^1\cdots dx^{n-1}$$

$$=\int_{(-1)^n\varepsilon\overrightarrow{V}^{n-1}_1}(-1)^{n-1}a_n(x^1,\cdots,x^{n-1},0)dx^1\wedge\cdots\wedge dx^{n-1}$$

$$=\int_{(-1)^n\varepsilon\overrightarrow{V}^{n-1}_1}\left(\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}a_i dx^1\wedge\cdots\wedge\widehat{dx^i}\wedge\cdots\wedge dx^n\right)_{|x^n=0}=\int_{\overrightarrow{\partial M}}(g_i\omega)\Big|_{\partial M}=\int_{\overrightarrow{\partial M}}I^*(g_i\omega)$$

(参看图70)。

注 在不致混淆的情形下，我们常将 Stokes 定理写作

$$\int_{\overrightarrow{M}}d\omega=\int_{\overrightarrow{\partial M}}\omega.$$

2. R^n 中的例子

下面我们给出 Stokes 定理的一些具体例子，在每个例子中，

§7.1 定理 2 的条件总是假定成立的.

设 M 是 R^n 中的 k 维正则子流形，如果 ω 是定义在含 M 的一个开集(R^n 的)上的 $C^\infty k$-形式，而

$$I_M: M \to R^n$$

和

$$I_{\partial M}: \partial M \to M$$

都是包含映射，则 Stokes 定理为

$$\int_M d\omega \Big|_M = \int_{\vec{M}} I_M^*(d\omega) = \int_{\vec{M}} d(I_M^*\omega)$$

$$= \int_{\overrightarrow{\partial M}} I_{\partial M}^*(I_M^*\omega) = \int_{\overrightarrow{\partial M}} (I_M \circ I_{\partial M})^*\omega$$

$$= \int_{\overrightarrow{\partial M}} \omega \Big|_{\partial M} \left(\text{简写为} \int_{\vec{M}} d\omega = \int_{\overrightarrow{\partial M}} \omega\right).$$

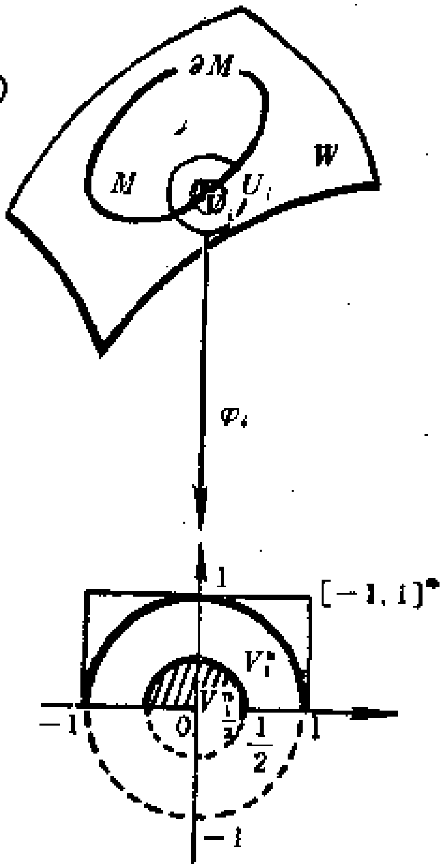


图 70

例 1 $W = R^1$, 以正定向, $\vec{M} = \overrightarrow{(a, b)}$, $\overrightarrow{\partial M} = \{b\}^+ \cup \{a\}^-$, $\omega = f$ 是 R^1 上的 $C^\infty 0$-阶形式,即为一个 C^∞ 函数, $d\omega = f'(x)dx$. 则 Stokes 定理为

$$\int_{\overrightarrow{(a,b)}} f'(x)dx = \int_{\overrightarrow{\partial(a,b)}} f$$

或

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a) = f(x) \Big|_a^b,$$

这是积分基本定理,即 Newton-Leibnitz 公式。

例 2 $W = R^2$, M 是有界开集, 边界为 ∂M, 由 $\vec{W}$ 决定了 $\vec{M}$. $\overrightarrow{\partial M}$, $\omega = pdx + qdy$ 为 R^2 中的 $C^\infty 1$-形式, $d\omega = \left(\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}\right)dx \wedge dy$, 于是 Stokes 定理形如

$$\int_{\vec{M}} \left(\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}\right) dx \wedge dy = \int_{\overrightarrow{\partial M}} pdx + qdy,$$

这是 Green 公式.

例 3 W是R^3中 2 维可定向的C^∞正则子流形，M 是W的有界开集，边界为∂M. 由$\vec{W}$决定了 $\vec{M}$ 和$\overrightarrow{\partial M}$. $\omega = pdx + qdy + rdz$ 为R^3中的 C^∞ 1 -形式,

$$d\omega = \left(\frac{\partial r}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial z}\right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial r}{\partial x}\right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}\right) dx \wedge dy,$$

于是

$$\int_{\vec{M}} \left[\left(\frac{\partial r}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial z}\right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial r}{\partial x}\right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}\right) dx \wedge dy \right]$$

$$= \int_{\overrightarrow{\partial M}} pdx + qdy + rdz,$$

这是Stokes公式.

例 4 $W = R^3$, M 是有界开集，边界为∂M, 由$\vec{W}$ 决定了$\vec{M}$ 和 $\overrightarrow{\partial M}$,

$$\omega = pdy \wedge dz + qdz \wedge dx + rdx \wedge dy,$$

$$d\omega = \left(\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} + \frac{\partial r}{\partial z}\right) dx \wedge dy \wedge dz,$$

则Stokes定理为

$$\int_{\vec{M}} \left(\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} + \frac{\partial r}{\partial z}\right) dx \wedge dy \wedge dz$$

$$= \int_{\overrightarrow{\partial M}} pdy \wedge dz + qdz \wedge dx + rdx \wedge dy,$$

这是奥斯特洛格拉特斯基-高斯公式(简称为奥-高公式)，或称为散度定理.

§7 习 题

1．在本节中，如果 $M\cup\partial M$ 紧致，$\{U_\alpha\}$是W的局部有限的开覆盖，证明只有有限个 U_α 与 $M\cup\partial M$ 相交。

2．证明引理 2。

3．在引理 3 的证明中，试选取一个特殊的 1 的分解，使得满足证明中的要求。

4．设W是 R^n 中的 2 维 C^∞ 正则子流形，可定向。M是W的开子集，∂M 为边界，由W决定了$\overrightarrow{M}$和$\overrightarrow{\partial M}$（$W$，$M$，$\partial M$ 满足 Stokes 定理条件），$\omega=\sum_{i=1}^{n}p_i dx^i$ 是R^n中的 C^∞ 1-形式。写出相应的 Stokes 定理。

5．设$W=R^n$，M是W的开集，∂M 为边界，$\overrightarrow{W}$决定了$\overrightarrow{M}$和$\overrightarrow{\partial M}$（$W$,$M$,$\partial M$ 满足 Stokes 定理条件），$\omega=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}p_i dx^1\wedge\cdots\wedge\widehat{dx^i}\wedge\cdots\wedge dx^n$ 是 R^n 中的 $C^\infty(n-1)$-形式。写出相应的 Stokes 定理。

6．设 $W=R^n$，M 是 R^n中的开集，∂M 为边界，由 $\overrightarrow{W}$ 决定了 $\overrightarrow{M}$ 和$\overrightarrow{\partial M}$（$W$,$M$,$\partial M$ 满足 Stokes 定理条件）。则有 Green 第一公式：

$$\int_{\overrightarrow{M}} v\nabla^2 u dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n$$

$$=\int_{\overrightarrow{\partial M}} v\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\frac{\partial u}{\partial x^i}dx^1\wedge\cdots\wedge\widehat{dx^i}\wedge\cdots\wedge dx^n$$

$$-\int_{\overrightarrow{M}}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x^i}\cdot\frac{\partial v}{\partial x^i}dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n,$$

其中 u,v 是 C^∞ 函数，$\Delta u=\nabla^2 u=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x^i\partial x^i}$。

7．设 u 是具有二阶连续偏导数的函数，如果它满足 Laplace 方程

$$\Delta u=\nabla^2 u=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x^i\partial x^i}=0,$$

则称 u 为调和函数。

设 $W=R^n$，M 是 W 的连通开集，∂M 为边界（$W,M,\partial M$ 满足 Stokes 定理条件），如果 u_1, u_2 是 C^∞ 的调和函数，且 $u_1|_{\partial M}=u_2|_{\partial M}$。证明：$u_1|_M=u_2|_M$。

8. 设 $W=R^n$，M 是 R^n 中的开集，∂M 为边界，由 $\vec{W}$ 决定了 $\vec{M}$ 和 $\overrightarrow{\partial M}$（$W,M,\partial M$ 满足 Stokes 定理条件），则有 **Green 第二公式**：

$$\int_{\vec{M}}\begin{vmatrix} u & v \\ \nabla^2 u & \nabla^2 v\end{vmatrix} dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n$$

$$=\int_{\overrightarrow{\partial M}}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\begin{vmatrix} u & v \\ \dfrac{\partial u}{\partial x^i} & \dfrac{\partial v}{\partial x^i}\end{vmatrix} dx^1\wedge\cdots\wedge\widehat{dx^i}\wedge\cdots\wedge dx^n,$$

其中 u,v 是 C^∞ 函数。

9. 设 ω 是 n 维单位球面 S^n 上的 $C^\infty(n-1)$-形式，证明 $\int_{\overrightarrow{S^n}}\omega=0$。

10. 设 $W=R^2$，M 是 W 的开集，$\partial M=C_1\cup C_2$，$C_1\cap C_2=\phi$（参看图 71）。如果 ω 是 W 上的 C^∞ 闭 1-形式，由 $\vec{W}$ 决定了 $\vec{M}$，$\overrightarrow{\partial M}$，$\vec{C_1}$，$\vec{C_2}$（$\overrightarrow{\partial M}$ 与 $\vec{C_1}$ 一致，也与 $-\vec{C_2}$ 一致；$W,M,\partial M$ 满足 Stokes 定理的条件），证明

$$\int_{\vec{C_1}}\omega=\int_{\vec{C_2}}\omega.$$

11. 设$(W,\mathscr{D})$是 n 维 C^∞ 的 σ 紧的可定向流形，此定向流形为 $\vec{W}$，ω 是 W 上的 C^∞ n-形式。则

$d\omega=0$（即 ω 为闭形式）$\Longleftrightarrow$ 对 W 的任何满足 Stokes 定理条件的 $W,M,\partial M$（M 是 W 的开集），必有 $\int_{\overrightarrow{\partial M}}I^*\omega=0$。

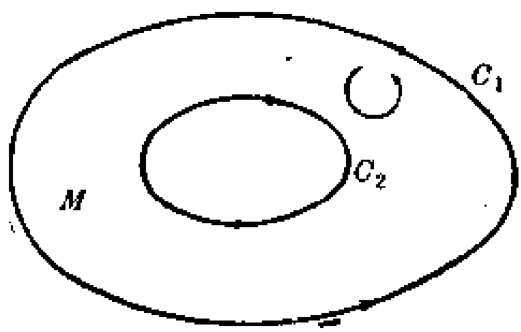


图 71

12. 证明 Stokes 定理中的条件"σ 紧"可改为"仿紧"。

§ 8 Riemann 流形

8.1 Riemann 流形 (M,g)

1. Riemann 流形 (M,g)

定义 1 所谓一个 Riemann 流形是一个 C^∞ 的 n 维流形 $(M, \mathscr{D})$,并且它具有一个对称和正定的 C^∞ 的 2 阶协变张量场 g, g_p: $T_p(M)\times T_p(M)\to R$, $p\in M$. 换句话说，对任何 X_p, Y_p, $Z_p\in T_p(M)$, $\lambda\in R$,满足条件:

(1°) $g_p(X_p, X_p)\geqslant 0$,且 $g_p(X_p, X_p)=0\Longleftrightarrow X_p=0$

(正定性);

(2°) $g_p(X_p,Y_p)=g_p(Y_p, X_p)$ (对称性);

(3°) $g_p(X_p+Y_p, Z_p)=g_p(X_p, Z_p)+g_p(Y_p, Z_p)$,

$g_p(\lambda X_p, Y_p)=\lambda g_p(X_p, Y_p)$ (偏线性);

(4°) g 是 M 上的 C^∞ 张量场.

我们将此 Riemann 流形简记为 (M, g). g 有时也记为 $\langle,\rangle$, 称为内积或度量张量或 Riemann 度量. 为方便起见,经常省去 p, 写为 $g(X, Y)$.

Riemann 流形实际上就是将每一点的切空间欧氏化，同时要求从一点到另一点变化时保证充分的光滑性，因此它就是欧氏空间的推广.

例 1 设 $\{x^i\}$, $\{y^i\}$ 是局部坐标系,

$$X=\sum_{i=1}^n \lambda^i\frac{\partial}{\partial x^i},$$

$$Y=\sum_{i=1}^n \mu^i\frac{\partial}{\partial y^i},$$

$$g_{ij}=g\left(\frac{\partial}{\partial x^i},\ \frac{\partial}{\partial x^j}\right),$$

$$\tilde{g}_{kl}=g\left(\frac{\partial}{\partial y^k},\ \frac{\partial}{\partial y^l}\right),$$

则

$$g(X,Y)=g\left(\sum_{i=1}^n\lambda^i\frac{\partial}{\partial x^i},\ \sum_{j=1}^n\mu^j\frac{\partial}{\partial x^j}\right)$$

$$=\sum_{i,j=1}^n g\left(\frac{\partial}{\partial x^i},\ \frac{\partial}{\partial x^j}\right)\lambda^i\mu^j$$

$$=\sum_{i,j=1}^n g_{ij}\lambda^i\mu^j.$$

$$\tilde{g}_{kl}=g\left(\frac{\partial}{\partial y^k},\ \frac{\partial}{\partial y^l}\right)=g\left(\sum_{i=1}^n\frac{\partial x^i}{\partial y^k}\frac{\partial}{\partial x^i},\ \sum_{j=1}^n\frac{\partial x^j}{\partial y^l}\frac{\partial}{\partial x^j}\right)$$

$$=\sum_{i,j=1}^n g\left(\frac{\partial}{\partial x^i},\ \frac{\partial}{\partial x^j}\right)\frac{\partial x^i}{\partial y^k}\cdot\frac{\partial x^j}{\partial y^l}=\sum_{i,j=1}^n g_{ij}\frac{\partial x^i}{\partial y^k}\cdot\frac{\partial x^j}{\partial y^l}.$$

$$\begin{pmatrix}\tilde{g}_{11}\cdots\tilde{g}_{1n}\\ \cdots\ \cdots\ \cdots\\ \tilde{g}_{n1}\cdots\tilde{g}_{nn}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{\partial x^1}{\partial y^1}\cdots\frac{\partial x^n}{\partial y^1}\\ \cdots\ \cdots\ \cdots\\ \frac{\partial x^1}{\partial y^n}\cdots\frac{\partial x^n}{\partial y^n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}g_{11}\cdots g_{1n}\\ \cdots\ \cdots\ \cdots\\ g_{n1}\cdots g_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial x^1}{\partial y^1}\cdots\frac{\partial x^1}{\partial y^n}\\ \cdots\ \cdots\ \cdots\\ \frac{\partial x^n}{\partial y^1}\cdots\frac{\partial x^n}{\partial y^n}\end{pmatrix}.$$

此外，

$$g_{ij}=g\left(\frac{\partial}{\partial x^i},\ \frac{\partial}{\partial x^j}\right)=g\left(\frac{\partial}{\partial x^j},\ \frac{\partial}{\partial x^i}\right)=g_{ji},$$

由于 g 正定，从线性代数知识可推出 (g_{ij}) 是正定矩阵。

不难从上述坐标形式来定义 Riemann 流形，并且可证明与定义 1 是等价的（留作习题）。

2．仿紧的几个等价条件

设 $(M, \mathscr{D})$ 是一个 Riemann 流形，度量张量为 $g=\langle\ ,\ \rangle$，$X, Y\in T_p(M)$，定义 X 的模为

$$\|X\|=\sqrt{\langle X, X\rangle}.$$

如果 $X\neq 0$，$Y\neq 0$，定义 X 和 Y 之间的夹角 $\theta(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$ 为

$$\cos\theta=\frac{\langle X, Y\rangle}{\|X\|\cdot\|Y\|}$$

（由 Schwartz 不等式 $|\langle X, Y\rangle|\leqslant\|X\|\|Y\|$）（参看图 72）。

定义 2 设 σ 是定义在 $[a, b]$ 上的一条 C^∞ 曲线，$T_\sigma(t)=\sigma_*\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)$ 为 σ 的切向量（参看图 73），我们定义从 a 到 b 的 σ 的长为 $(a\leqslant b)$，

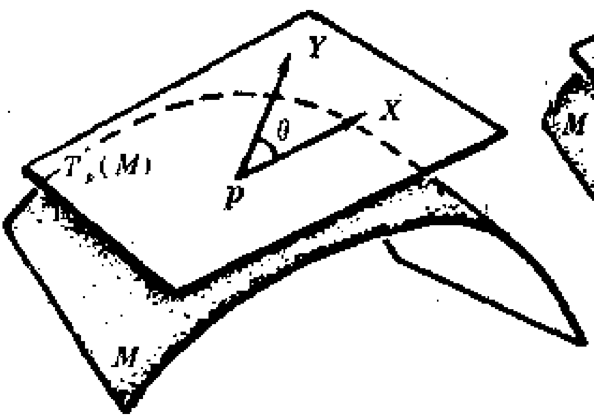


图 72

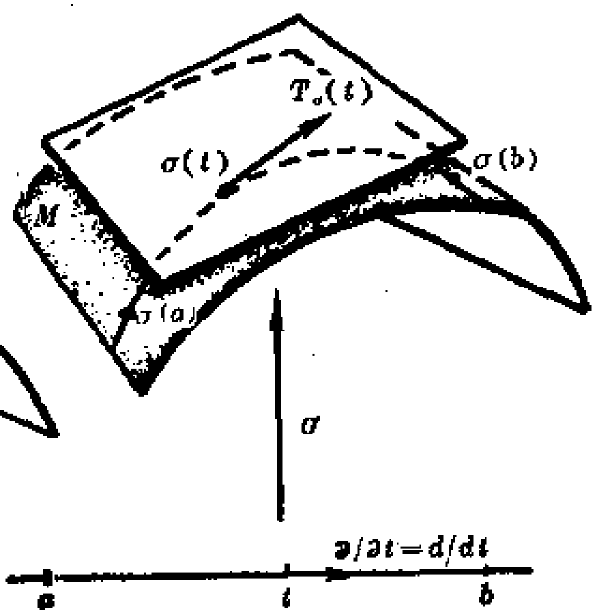


图 73

$$|\sigma|_a^b=\int_a^b\sqrt{\langle T_\sigma(t),T_\sigma(t)\rangle}dt$$

(因为被积函数连续，所以积分存在)。

一般地，一条分段 C^∞ 曲线 $\sigma(t_1<t_2<\cdots<t_k,\sigma:[t_1,t_k]\to M$ 是连续映射，且 σ 是 $[t_i,t_{i+1}]$ 上的 C^∞ 曲线，$i=1,2,\cdots,k-1$)的长定义为各段长的和。

引理 1 $|\sigma|_a^b$ 的定义不依赖于 $\sigma([a,b])$ 的参数的选取。

证明 设 $\varphi:[c,d]\to[a,b]$ 是 C^∞ 的，$t=\varphi(u)$，$\varphi(c)=a,\varphi(d)=b,\varphi'(u)>0$。则 $T_{\sigma\circ\varphi}(u)=\varphi'(u)T_\sigma(\varphi(u))$，于是

$$\int_a^b\sqrt{\langle T_\sigma(t),T_\sigma(t)\rangle}dt=\int_c^d\sqrt{\langle T_\sigma(\varphi(u)),T_\sigma(\varphi(u))\rangle}\varphi'(u)du$$
$$=\int_c^d\sqrt{\langle T_{\sigma\circ\varphi}(u),T_{\sigma\circ\varphi}(u)\rangle}du.\qquad\#$$

定义 3 设$(M,\mathscr{D})$是连通的Riemann流形，对任何 $p,q\in M$，我们定义

$\rho(p,q)=\inf\{|\sigma|\,|\,\sigma$ 是连接 p 和 q 的分段 C^∞曲线，且在各段上处处 $T_\sigma\neq0\}$，

可以证明，它也等于

$\inf\{|\sigma|\,|\,\sigma$ 是连接 p 和 q 的分段 C^∞曲线$\}$。

引理 2 对任何 $p\in M$，取 p 的局部坐标系 $(U,\varphi),\{x^i\}$，使得 $\varphi(p)=0$，则存在 $a>0,R\geqslant r>0$，满足

$r|\varphi(q)|\leqslant\rho(p,q)\leqslant R|\varphi(q)|\quad(q\in\varphi^{-1}(A),A=\{x\,|\,\|x\|\leqslant a\})$。

证明 选择 $a>0$，使 $A=\{x\,|\,\|x\|\leqslant a\}\subset\varphi(U)$，在紧致集合

$$B=\{(q,X_q)\,|\,\varphi(q)\in A,X_q=\sum_{i=1}^n\lambda^i\frac{\partial}{\partial x^i},\ \sum_{i=1}^n(\lambda^i)^2=1\}$$

上，

$$|X_q|=\sqrt{\langle X_q, X_q\rangle}=\sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(q)\lambda^i\lambda^j}$$

是一个连续函数，它达到最大值 R 和最小值 $r>0$。

(1°) 如果 σ 是 $\varphi\circ\sigma$ 的象在 A 中的任何一条分段 C^∞ 曲线，由于在各段上 $T_\sigma\neq 0$，所以若选取曲线 $\varphi\circ\sigma$ 的弧长为参数，则 $T_\sigma=\sum_{i=1}^{n}\lambda^i\frac{\partial}{\partial x^i}$，$\sum_{i=1}^{n}(\lambda^i)^2=1$。为方便起见，令 $\sigma(0)=p$，$\sigma(b)=q$（参看图 74）。显然，$(\sigma(t), T_\sigma(t))\in B$，$t\in(0,b)$。于是，

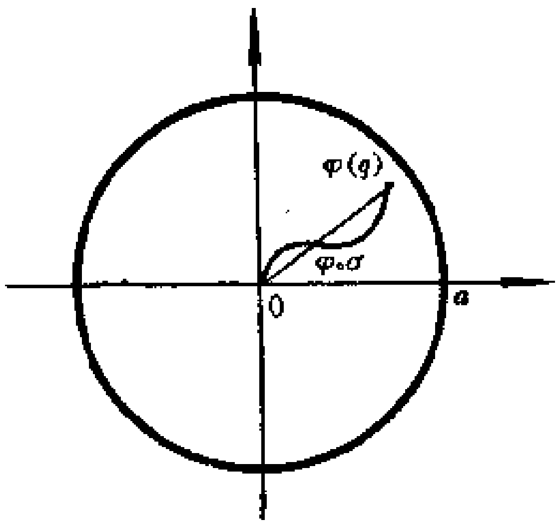


图 74

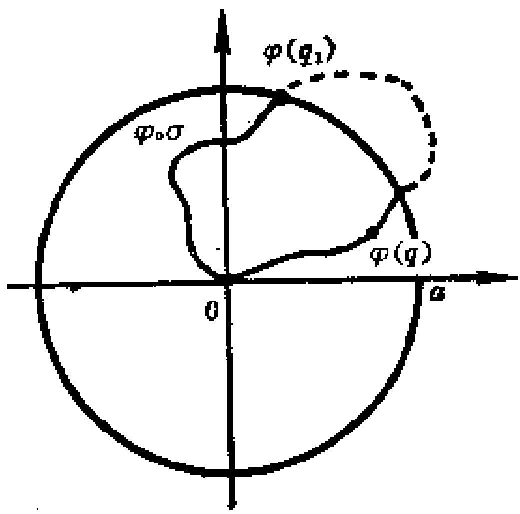


图 75

$$|\sigma|=\int_0^b\sqrt{\langle T_\sigma(t), T_\sigma(t)\rangle}dt$$

$$\geqslant\int_0^b\sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}\lambda^i\lambda^j}\,dt\geqslant\int_0^b r\,dt=rb\geqslant r|\varphi(q)|.$$

如果 σ 是任何一条分段 C^∞ 曲线，且在各段上处处 $T_\sigma\neq 0$。令 q_1 为 σ 与 $\varphi^{-1}(\{x\mid\|x\|=a\})$ 的第一个交点（参看图 75），则

$$|\sigma|\geqslant\int_0^{?}\sqrt{\langle T_\sigma(t), T_\sigma(t)\rangle}\,dt\geqslant r\cdot a\geqslant r|\varphi(q)|.$$

由 $\rho(p,q)$ 的定义，有

$$\rho(p,q)\geqslant r|\varphi(q)|.$$

(2°) 取特殊的σ,使$\varphi\circ\sigma$为连0和$\varphi(q)$的直线段,于是

$$\rho(p,q)\leqslant|\sigma|=\int_0^{|\varphi(q)|}\sqrt{\langle T_\sigma(t),T_\sigma(t)\rangle}\,dt$$

$$\leqslant\int_0^{|\varphi(q)|}R\,dt=R|\varphi(q)|.\qquad\#$$

定理 1 设$(M,g)(g=\langle\ ,\ \rangle)$是一个连通的 Riemann 流形,$\rho$如定义 3 所述,则$(M,\rho)$是一个度量(距离)空间,并且由$\rho$所诱导的拓扑和流形$M$上的拓扑一致。

证明 我们先证ρ满足度量空间的三个条件:

(1°) 因为$|\sigma|\geqslant 0$,所以$\rho(p,q)\geqslant 0$。

设σ^k是连接p和p的分段C^∞曲线,并且$\varphi\circ\sigma^k$为A中长度等于$\frac{1}{k}$的直线形。于是

$$|\sigma^k|=\int_0^{\frac{1}{k}}\sqrt{\langle T_{\sigma^k}(t),T_{\sigma^k}(t)\rangle}\,dt\leqslant\int_0^{\frac{1}{k}}R\,dt=\frac{R}{k},$$

这就推出了

$$0\leqslant\rho(p,p)\leqslant\inf\{|\sigma^k|\,|\,k=1,2,\cdots\}$$

$$\leqslant\inf\left\{\frac{R}{k}\middle|k=1,2,\cdots\right\}=0,$$

$$\rho(p,p)=0.$$

此外,如果$p\neq q$,则可选取充分小的$a>0$,使得它满足引理 2 的条件,并且使p的坐标邻域U_1,$\overline{U}_1=\varphi^{-1}(A)$,$q\overline{\in}\overline{U}_1$。于是

$\rho(p,q)=\inf\{|\sigma|\,|\sigma$是连接$p$和$q$的分段$C^\infty$曲线,且在各段上,处处$T_\sigma\neq 0\}\geqslant ra>0$。这就证明了

$$\rho(p,q)=0\Longleftrightarrow p=q.$$

(2°) 如果$\sigma(t)$是连接p和q的分段C^∞曲线,$\sigma(a)=p$,$\sigma(b)=q$,且在各段上,处处$T_\sigma\neq 0$,则$\sigma_1(u)=\sigma((1-u)b+ua)$是

连接 q 和 p 的分段 C^∞ 曲线，$\sigma_1(0)=\sigma(b)=q,\sigma_1(1)=\sigma(a)=p$，且在各段上，处处 $T_{\sigma_1}\neq 0$。容易验证 $|\sigma|=|\sigma_1|$。再由 ρ 的定义立即可知 $\rho(p,q)=\rho(q,p)$。

(3°) 取连接 p 和 q 的分段 C^∞ 曲线 σ_1^k，再取连接 q 和 r 的分段 C^∞ 曲线 σ_2^k，使它们在各段上处处有 $T_{\sigma_1^k}\neq 0$，$T_{\sigma_2^k}\neq 0$，并且 $\lim\limits_{k\to+\infty}|\sigma_1^k|=\rho(p,q)$，$\lim\limits_{k\to+\infty}|\sigma_2^k|=\rho(q,r)$。如果 $\sigma_1^k(a)=p,\sigma_1^k(b)=q,\sigma_2^k(c)=q,\sigma_2^k(d)=r$。显然，

$$\sigma^k(t)=\begin{cases}\sigma_1^k(t), & a\leqslant t\leqslant b,\\ \sigma_2^k\left(\dfrac{c-d}{b-e}t+\dfrac{bd-ce}{b-e}\right), & b<t\leqslant e,\end{cases}$$

是一条连接 p 和 r 的分段 C^∞ 曲线，且在各段上处处 $T_{\sigma^k}\neq 0$。于是

$$\rho(p,r)\leqslant|\sigma^k|=|\sigma_1^k|+|\sigma_2^k|,$$

令 $k\to+\infty$，则有

$$\rho(p,r)\leqslant\rho(p,q)+\rho(q,r).$$

最后，从引理 2 中的公式

$$r|\varphi(q)|\leqslant\rho(p,q)\leqslant R|\varphi(q)|$$

推出，由 ρ 诱导的拓扑和流形 M 的拓扑是一致的。 #

定理 2 对于连通的 n 维 C^∞ 流形 M，以下条件是互相等价的：

(1°) M 是 A_2 空间；

(2°) M 是 σ 紧的；

(3°) M 是仿紧的；

(4°) 在 M 上存在 Riemann 度量；

(5°) M 是度量空间。

证明 (1°)⇒(2°) 由第二章§3 推论 1。

(2°)⇒(3°) 由第二章§3 定理 1(2°)。

(3°)⇒(4°) 由第二章 §3 定理 4，存在一个 M 上的坐标邻域的局部有限的开覆盖$\{U_\alpha\}$以及附属于它的广义 1 的分解$\{g_\alpha\}$. 在每个 U_α 中，设其局部坐标为$\{x_\alpha^i\}$，我们在每个 U_α 中定义 Riemann 度量为$\langle\ ,\ \rangle_\alpha$，使得 $\left\langle\frac{\partial}{\partial x_\alpha^i}, \frac{\partial}{\partial x_\alpha^j}\right\rangle_\alpha=\delta_j^i$. 则 $g_\alpha\cdot\langle\ ,\ \rangle_\alpha$ 是在 M 上整体 C^∞ 的，它在$\overline{\{p\in U_\alpha \mid g_\alpha(p)>0\}}$外为 0. 令

$$\langle\ ,\ \rangle=\sum_\alpha g_\alpha\cdot\langle\ ,\ \rangle_\alpha.$$

容易验证它满足定义 1 中的条件，因此它是 M 上的一个 C^∞的 Riemann 度量.

(4°)⇒(5°) 由定理 1 推出.

(5°)⇒(1°) 因为 M是连通的局部可分的度量空间，则由下面的引理 3 可知 M 是可分的，再由第一章 §5 定理 3 得到 M 是 A_2 空间. #

引理 3 连通的、局部可分的度量空间(M,ρ)是可分的.

证明 设 $U(x,r)=\{y\in M \mid \rho(x,y)<r\}$，$x\in M$，$r>0$. 对 $x,y\in M$，如果存在两个可分的 $U(x,r)$ 和 $U(y,r')$，使得 $x\in U(y,r')$，$y\in U(x,r)$，则称 x 和 y 是 R-相关的，记作 xRy. 明显地，xRx，$x\in M$. 我们也有 $xRy\Longleftrightarrow yRx$.

设 $A\subset M$，我们令

$$SA=\{y\in M \mid yRx, 对某个\ x\in A\},$$

$$S^nA=SS^{n-1}A,\quad n=2,3,\cdots.$$

特别地，对独点集 $\{x\}$，记 $S\{x\}=Sx$. 容易验证 $y\in S^nx\Longleftrightarrow x\in S^ny$（留作习题）.

下面我们证明：

(1°) 对每个 $x\in M$，Sx 是开集；

(2°) 如果 A是可分的，则 SA 也是可分的；

(3°) 令$U(x)=\bigcup_{n=1}^{\infty}S^n x, x\in M$。则对任何 $x,y\in M$，或者 $U(x)\cap U(y)=\phi$，或者 $U(x)=U(y)$。

(1°) 的证明：设 $y\in Sx$。因为 yRx，存在 $r,r'>0$，使得 $U(x,r)$和$U(y,r')$是可分的，并且 $y\in U(x,r)$，$x\in U(y,r')$。因为 $\rho(x,y)<r'$，存在 $r_1>0$，使

$$\rho(x,y)<r_1<r'.$$

设 $r_0>0$ 且满足

$$r_0<r'-r_1, r_0<r-\rho(x,y), r_0<r_1-\rho(x,y).$$

我们证明 $U(y,r_0)\subset Sx$。如果 $z\in U(y,r_0)$，则

$$\rho(x,z)\leqslant\rho(x,y)+\rho(y,z)<\rho(x,y)+r_0<\min\{r,r_1\},$$

$z\in U(x,r)$，而 $U(x,r)$是可分的。此外，$x\in U(z,r_1)$。我们将证明 $U(z,r_1)\subset U(y,r')$，因而从 $U(y,r')$的可分性推出 $U(z,r_1)$是可分的。设 $w\in U(z,r_1)$，即 $\rho(z,w)<r_1$，则

$$\rho(y,w)\leqslant\rho(y,z)+\rho(z,w)<\rho(y,z)+r_1<r_0+r_1<r',$$

因此，$w\in U(y,r')$。以上证明了对每个 $z\in U(y,r_0)$ 有 zRx，即 $U(y,r_0)\subset Sx$，这就证明了 Sx 是开集。

(2°) 的证明：设A是 M 的可分子集，D是A的可数稠密子集。若 $x\in SA$，则存在 $y\in A$，使得 xRy 和存在一个可分球 $U(y,r)$ 包含 x。令 $r_0>0$，使得它是一个有理数，且 $\rho(x,y)<r_0<r$。因为D在A中是稠密的，存在 $z\in D$，满足

$$\rho(z,y)<\min\{r_0-\rho(x,y), r-r_0\}.$$

从

$$\rho(x,z)\leqslant\rho(x,y)+\rho(y,z)<\rho(x,y)+r_0-\rho(x,y)=r_0,$$

推出 $x\in U(z,r_0)$。为了证明 $U(z,r_0)$ 是可分的，我们只须证明 $U(z,r_0)$包含在可分的 $U(y,r)$中。如果 $w\in U(z,r_0)$，则

$$\rho(w,y)\leqslant\rho(w,z)+\rho(z,y)<r_0+\rho(z,y)<r_0+r-r_0=r,$$

因此，$w\in U(y,r)$.

于是 SA 被包含在至多可数多个中心是 D 中的点，半径为正有理数的可分球的併集中，显然，这併集是可分的，因而它的子集 SA 也是可分的。

(3°) 的证明：假设 $U(x)\cap U(y)\neq\phi$，则有 $z\in U(x)\cap U(y)$. 于是 $z\in S^m x$ 和 $z\in S^n y$（某个 m 和 n）。从 $z\in S^m x$，我们得到 $x\in S^m z$. 因此，$x\in S^m z\subset S^{m+n} y$，这就推出了对于每个 k，$S^k x\subset S^{k+m+n} y$。因此，$U(x)\subset U(y)$. 类似地，我们有 $U(y)\subset U(x)$. 于是，$U(x)=U(y)$.

由(1°)，$SA=\bigcup\limits_{x\in A} Sx$ 是开集. 因此，$U(x)$ 是开集. 由(2°)，$S^n x$ 是可分的，因而 $U(x)$是可分的。因为 M 是连通的且 $U(x)$ 是开集，以及(3°)推出 $M=U(x)$，因此，M 是可分的。 #

3. 体积元素和长度、面积、体积

引理 4 设(M,g)是 C^∞ 的 Riemann 流形，则在任何局部坐标系(U,φ)，$\{x^i\}$中，必存在 C^∞的规范正交基。

证明 根据 Gram-Schmidt 正交过程，设

$$\begin{cases} Y_1=\dfrac{\partial}{\partial x^1}, \\ Y_2=\lambda_{21}\dfrac{\partial}{\partial x^1}+\dfrac{\partial}{\partial x^2}, \\ Y_3=\lambda_{31}\dfrac{\partial}{\partial x^1}+\lambda_{32}\dfrac{\partial}{\partial x^2}+\dfrac{\partial}{\partial x^3}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ Y_n=\lambda_{n1}\dfrac{\partial}{\partial x^1}+\cdots+\lambda_{n,n-1}\dfrac{\partial}{\partial x^{n-1}}+\dfrac{\partial}{\partial x^n}. \end{cases}$$

由$\langle Y_i,Y_j\rangle=0(i\neq j)$ 可推出$\left\langle\dfrac{\partial}{\partial x^i},\ Y_j\right\rangle=0(i<j)$，即

$$\lambda_{j1}\left\langle\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^1}\right\rangle+\lambda_{j2}\left\langle\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^2}\right\rangle+\cdots+\lambda_{j,j-1}$$

$$\left\langle\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^{j-1}}\right\rangle+\left\langle\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}\right\rangle=0\quad(i=1,2,\cdots,j-1).$$

于是可解出 $\lambda_{ji}(j=2,3,\cdots,n,i<j)$ 是 $\left\langle\frac{\partial}{\partial x^k},\frac{\partial}{\partial x^l}\right\rangle$ 的有理函数,因而 Y_i 在 U 上是 C^∞ 的。令

$$e_i=\frac{Y_i}{|Y_i|}=\frac{Y_i}{\sqrt{\langle Y_i,Y_i\rangle}},$$

则 $\{e_i|i=1,2,\cdots,n\}$ 是 U 上的 C^∞ 的规范正交基。 #

引理 5 设 (M,g) 是 n 维可定向的 Riemann 流形，它的定向为 μ。如果 $\{e_i|i=1,2,\cdots,n\}$ 是 $T_p(M)$ 中的规范正交基，而 $\{W_i|i=1,2,\cdots,n\}$ 是它的对偶基．则

(1°) n-形式

$$W_1\wedge\cdots\wedge W_n$$

与满足条件: $\overrightarrow{[e_1,\cdots,e_n]}_p=\mu_p$ 的规范正交基的选取无关。

(2°) 在 p 的局部坐标系 $(U,\varphi),\{x^i\}$ 中 $\left(\overrightarrow{\left[\frac{\partial}{\partial x^1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^n}\right]}_p=\mu_p\right)$,

$$W_1\wedge\cdots\wedge W_n=\sqrt{\det(g_{ij})}\,dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n,$$

其中 $g_{ij}=\left\langle\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}\right\rangle$.

证明 (1°) 设 $\{e_i'|i=1,2,\cdots,n\}$ 是 $T_p(M)$ 中的另一规范正交基,且满足条件 $\overrightarrow{[e_1',\cdots,e_n']}_p=\mu_p$. $\{W_i'|i=1,2,\cdots,n\}$ 是它的对偶基．如果令

$$\begin{pmatrix}e_1'\\ \vdots\\ e_n'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_{11}&\cdots&c_{1n}\\ \cdots&\cdots&\cdots\\ c_{n1}&\cdots&c_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e_1\\ \vdots\\ e_n\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} W'_1 \\ \vdots \\ W'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{11} & \cdots & d_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ d_{n1} & \cdots & d_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_1 \\ \vdots \\ W_n \end{pmatrix},$$

其中(c_{ij})为正交矩阵，且 $\det(c_{ij})=1$. 则

$$\delta^i_j = W'_i(e'_j) = \left(\sum_{k=1}^{n} d_{ik}W_k\right)\left(\sum_{l=1}^{n} c_{jl}e_l\right) = \sum_{k,l=1}^{n} d_{ik}c_{jl}W_k(e_l)$$

$$= \sum_{k,l=1}^{n} d_{ik}c_{jl}\delta^k_l = \sum_{k=1}^{n} d_{ik}c_{jk},$$

所以(d_{ij})是$(c_{ij})'$的逆矩阵，于是(d_{ij})也是正交矩阵，且 $\det(d_{ij})=1$，这就推出了

$$W'_1 \wedge \cdots \wedge W'_n = \left(\sum_{i_1=1}^{n} d_{1i_1}W_{i_1}\right) \wedge \cdots \wedge \left(\sum_{i_n=1}^{n} d_{ni_n}W_{i_n}\right)$$

$$= \det(d_{ij})\, W_1 \wedge \cdots \wedge W_n = W_1 \wedge \cdots \wedge W_n.$$

(2°) 设$\frac{\partial}{\partial x^i} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}e_j$，则

$$g_{ij} = \left\langle \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right\rangle = \left\langle \sum_{l=1}^{n} a_{il}e_l, \sum_{s=1}^{n} a_{js}e_s \right\rangle = \sum_{l=1}^{n} a_{il}a_{jl},$$

即$(g_{ij}) = (a_{il})(a_{il})'$，所以

$$\det(a_{il}) = \sqrt{\det(g_{ij})} \quad (\det(a_{il})>0).$$

由于

$$W_1 \wedge \cdots \wedge W_n\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right)$$

$$= \det(a_{il})\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right),$$

因此，

$$W_1 \wedge \cdots \wedge W_n = \det(a_{il})\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$$

$$= \sqrt{\det(g_{ij})}\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n. \qquad \#$$

定义 4 设(M, g)是 n 维可定向的 Riemann 流形，由引理 4 和 5，在M上可以确定一个处处非 0 的 C^∞ 的 n-形式，它在每个与M的定向 μ 一致的局部坐标系(U, φ)，$\{x^i\}$中

$$\left(\overrightarrow{\left[\frac{\partial}{\partial x^1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right]_p} = \mu_p\right),$$

可表示为

$$W_1 \wedge \cdots \wedge W_n = \sqrt{\det(g_{ij})}\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n,$$

我们称它为M上的由 μ 决定的**体积元素**。并用 dV 表示(一般地，它不是 C^∞ 的$(n-1)$-形式的微分)。当 $n=1$ 时，称为“弧长元”(表示成 dl 或 ds)；当 $n=2$ 时，称为“面积元素”(表示成dA或 dS)。

定义 5 设(M, g)是 C^∞ 的 n 维 Riemann 流形，$\{x^i\}$为局部坐标系，我们定义**绝对体积元素**为

$$|dV| = \sqrt{\det(g_{ij})}\, dx^1 \cdots dx^n$$

(M不必是可定向的)，如果 $W, M, \partial M$ 满足第二章 §7 条件，定义M的**体积**为

$$\int_M |dV| = \sum_\alpha \int_{\varphi_\alpha(M \cap U_\alpha)} (g_\alpha \circ \varphi_\alpha^{-1}) \sqrt{\det(g_{ij})}\, dx^1 \cdots dx^n$$

容易验证这定义与局部有限的坐标邻域的覆盖$\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$以及附属于它的广义 1 的分解$\{g_\alpha\}$的选取无关(留作习题)。

设 f 是W上的连续函数，更进一步我们可以定义**第一型积分**

$$\int_M f\, |dV|$$

$$= \sum_\alpha \int_{\varphi_\alpha(M \cap U_\alpha)} (f \circ \varphi_\alpha^{-1}) \cdot (g_\alpha \circ \varphi_\alpha^{-1}) \sqrt{\det(g_{ij})}\, dx^1 \cdots dx^n,$$

容易验证它也与$\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$，$\{g_\alpha\}$的选取无关(留作习题)。显然，当 $f=1$ 时，它就是M的体积。

注 对于1维和2维情形，"体积"通常称为"长度"和"面积"。

如果 $\vec{W}$ 是定向流形，它决定了 $\vec{M}$，体积元素为 $dV=W_1\wedge\cdots\wedge W_n$，则

$$\int_M f|dV|=\int_{\vec{M}} fW_1\wedge\cdots\wedge W_n.$$

为区别起见，我们称 $\int_{\vec{M}}\omega$ 为**第二型积分**。

例 2 设 $\{x^i\}$ 是 R^n 的通常的整体坐标。我们定义 $\langle\ ,\ \rangle$ 为

$$\left\langle\frac{\partial}{\partial x^i},\ \frac{\partial}{\partial x^j}\right\rangle=\delta^i_j,$$

$$\langle X,Y\rangle=\left\langle\sum_{i=1}^n\lambda^i\frac{\partial}{\partial x^i},\ \sum_{j=1}^n\mu^j\frac{\partial}{\partial x^j}\right\rangle=\sum_{i=1}^n\lambda^i\mu^i,$$

容易验证 $(R^n,\langle\ ,\ \rangle)$ 是一个 C^∞ 的 Riemann 流形，$\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\right\}$ 为规范正交基，$\{dx^i\}$ 为其对偶基，

$$dV=dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n$$

为体积元素。

8.1 习 题

1. 设 (M,g) 是 Riemann 流形，$\sigma:[a,b]\to M$ 是 C^∞ 曲线，在 M 的局部坐标系中，曲线的弧长为

$$s=\int_a^t\sqrt{\langle T_\sigma(t),T_\sigma(t)\rangle}\,dt=\int_a^t\sqrt{\left\langle\sum_{i=1}^n\frac{dx^i}{dt}\frac{\partial}{\partial x^i},\ \sum_{j=1}^n\frac{dx^j}{dt}\frac{\partial}{\partial x^j}\right\rangle}dt$$

$$=\int_a^t\sqrt{\sum_{i,j=1}^n g_{ij}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}}\,dt.$$

于是

$$ds^2=\sum_{i,j=1}^n g_{ij}dx^idx^j.$$

(1°) 如果 σ 是 R^n 中的 C^∞ 曲线，写出曲线弧长的具体公式。

(2°) 如果 σ 是 R^2 中的 C^∞ 曲线，R^2 中的通常的整体坐标为 (x,y)，试对 σ 分别用 x,y,θ（极坐标中的极角）作为参数写出其曲线的弧长公式。

2. 设 R^n 以通常的内积

$$\langle X,Y\rangle=\left\langle \sum_{i=1}^{n}\lambda^i\frac{\partial}{\partial x^i},\ \sum_{j=1}^{n}\mu^j\frac{\partial}{\partial x^j}\right\rangle=\sum_{i,j=1}^{n}\lambda^i\mu^j.$$

M 是 R^n 中的 k 维子流形。则 M 自然可视作一个 C^∞Riemann 流形如下：设 $I:M\to R^n$ 是包含映射，则

$$I_*:T(M)\to T(R^n),$$
$$X_p^*\to I_{*p}X_p^*=X_p.$$

令 g 为

$$g_p(X_p^*,Y_p^*)=\langle I_{*p}X_p^*,I_{*p}Y_p^*\rangle=\langle X_p,Y_p\rangle.$$

(1°) 验证 g 是 M 上的一个 Riemann 度量，称为由 $\langle\ ,\ \rangle$ 诱导的Riemann度量。为方便起见，有时仍记为 $\langle\ ,\ \rangle$。

(2°) 设 $\{x^i\}$ 为 R^n 的通常的整体坐标。$\vec{M}$ 是定向流形，$\{u^i|i=1,2,\cdots,k\}$ 是 M 的局部坐标，且 $\overrightarrow{\left[\frac{\partial}{\partial u^1},\cdots,\frac{\partial}{\partial u^k}\right]}$ 与 $\vec{M}$ 一致。证明 M 上的 k 维体积元素为

$$dV=\sqrt{\det\begin{pmatrix}\frac{\partial x^1}{\partial u^1}&\cdots&\frac{\partial x^n}{\partial u^1}\\ \cdots&\cdots&\cdots\\ \frac{\partial x^1}{\partial u^k}&\cdots&\frac{\partial x^n}{\partial u^k}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial x^1}{\partial u^1}&\cdots&\frac{\partial x^1}{\partial u^k}\\ \cdots&\cdots&\cdots\\ \frac{\partial x^n}{\partial u^1}&\cdots&\frac{\partial x^n}{\partial u^k}\end{pmatrix}}\,du^1\wedge\cdots\wedge du^k.$$

(3°) 当 $n=3$，$M=R^3$ 中的开集，局部坐标为球坐标 $\{r,\theta,\varphi\}$，写出相应的 3 维体积元素。

再对柱坐标 $\{r,\theta,z\}$，写出 3 维体积元素。

(4°) 当 $n=3$，M 为 R^3 中 2 维可定向的子流形时，写出 2 维体积元素（即面积元素）。特别取局部坐标为 $\{x,y\}$ 时，写出其 2 维体积元素。

(5°) 当 $n=3$，$M=S^2$，局部坐标为球面坐标 $\{\theta,\varphi\}$，写出其 2 维体积元素。

(6°) 当 $n=3$，$M=$ 圆柱面，局部坐标为柱面坐标 $\{\theta,z\}$，写出其 2 维体积

元素。

(7°) 当 $n=2$，M 为 R^2 中的 2 维开集，局部坐标为极坐标 $\{r,\theta\}$，写出其 2 维体积元素。

分别画出(3°)—(7°)中体积元素的几何图形。

3. 设 R^3 的通常的整体坐标为 $\{x,y,z\}$，$\vec{M}$ 为 R^3 中的 2 维定定向子流形，M 上的局部坐标系 $\{u,v\}$ 与 $\vec{M}$ 一致，由 R^3 的通常内积诱导了 M 上的一个内积。则 M 上的单位法向量为

$$\frac{\dfrac{\partial}{\partial u}\times\dfrac{\partial}{\partial v}}{\left|\dfrac{\partial}{\partial u}\times\dfrac{\partial}{\partial v}\right|}=n^1\frac{\partial}{\partial x}+n^2\frac{\partial}{\partial y}+n^3\frac{\partial}{\partial z}.$$

证明：(1°) $n^1dy\wedge dz+n^2dz\wedge dx+n^3dx\wedge dy$

$$=\det\begin{pmatrix} n^1 & n^2 & n^3\\ \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u}\\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v}\end{pmatrix}du\wedge dv=\left|\frac{\partial}{\partial u}\times\frac{\partial}{\partial v}\right|du\wedge dv.$$

(2°) $$\left|\frac{\partial}{\partial u}\times\frac{\partial}{\partial v}\right|=\sqrt{EG-F^2},\quad E=\left\langle\frac{\partial}{\partial u},\ \frac{\partial}{\partial u}\right\rangle,$$

$$G=\left\langle\frac{\partial}{\partial v},\ \frac{\partial}{\partial v}\right\rangle,\quad F=\left\langle\frac{\partial}{\partial u},\ \frac{\partial}{\partial v}\right\rangle.$$

(3°) 面积元素 $dA=n^1dy\wedge dz+n^2dz\wedge dx+n^3dx\wedge dy$。

4. 设 (M_1,g_1) 和 (M_2,g_2) 都是 C^∞ 的 n 维可定向的 Riemann 流形，F：$M_1\to M_2$ 是 C^∞ 的保留定向的映射，且 $g_2(F_*X,\ F_*Y)=g_1(X,\ Y)$，即保 Riemann 度量或保内积的或等距的映射。证明

(1°) F^{-1} 也是保留定向和保 Riemann 度量的。

(2°) 如果 $\{e'_i\}$ 是 $T_{F(p)}(M_2)$ 的规范正交基，$\{\omega'_i\}$ 是 $\{e'_i\}$ 的对偶基，则 $\{e_i=(F^{-1})_*e'_i\}$ 是 $T_p(M_1)$ 的规范正交基，而 $\{\omega_i=F^*\omega'_i\}$ 是 $\{e_i\}$ 的对偶基。

(3°) F^* 保体积元素，即 $\omega_1\wedge\cdots\wedge\omega_n=F^*(\omega'_1\wedge\cdots\wedge\omega'_n)$。

(4°) 若 M_1 和 M_2 是紧致的，则它们有相同的体积。

5. 设

$$\omega=\frac{x}{r^2}dy-\frac{y}{r^2}dx \quad (r=\sqrt{x^2+y^2})$$

是 $R^2-\{0\}$ 上的 C^∞ 1-形式．证明

(1°) $d\omega=0$，即 ω 是闭形式。

(2°) ω 限制在 $S^1(r_0)=\{(x,y)\mid x^2+y^2=r_0^2, r_0>0\}$ 上有

$$\omega=d\theta=\frac{dl}{r_0} \quad \left(\theta=\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}, dl\text{为弧长元}\right).$$

(3°) $\int_{\overrightarrow{S^1(r_0)}}\omega=2\pi$，于是推出 ω 和 dl 都不是恰当的（注意：为什么 $\omega=d\theta$ 不能说是恰当的？）。

6．设

$$\omega=\frac{x}{r^3}dy\wedge dz+\frac{y}{r^3}dz\wedge dx+\frac{z}{r^3}dx\wedge dy \qquad (r=\sqrt{x^2+y^2+z^2})$$

是 $R^3-\{0\}$ 上的 C^∞ 的 2-形式．证明

(1°) $d\omega=0$，即 ω 是闭形式。

(2°) ω 限制在 $S^2(r_0)=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2=r_0^2, r_0>0\}$ 上有

$$\omega=\frac{dA}{r_0^2} \qquad (dA\text{ 为面积元素，参看题 3 (3°)）。}$$

(3°) $\int_{\overrightarrow{S^2(r_0)}}\omega=4\pi$，于是推出 ω 和 dA 都不是恰当的。

7．设 R^n 的通常的整体坐标为 $\{x^1,\cdots,x^n\}$，$\vec{M}$ 为 R^n 中的 $(n-1)$ 维 C^∞ 定向子流形，M 上的局部坐标系 $\{u^1,\cdots,u^{n-1}\}$ 与 $\vec{M}$ 一致，由 R^n 的通常的内积诱导了 M 上的一个内积．设 $N=\sum_{i=1}^n n^i\frac{\partial}{\partial x^i}$ 是 M 上的与 $\vec{M}$ 相一致的 C^∞ 单位法向量场．

$$\omega=\sum_{i=1}^n(-1)^{i-1}\frac{x^i}{r^n}dx^1\wedge\cdots\wedge\widehat{dx^i}\wedge\cdots\wedge dx^n \quad \left(r=\sqrt{\sum_{i=1}^n(x^i)^2}\right)$$

是 $R^n-\{0\}$ 上的 C^∞ 的 $(n-1)$-形式．证明

(1°) M 上的 $(n-1)$ 维体积元素

$$dV=\sum_{i=1}^n(-1)^{i-1}n^i dx^1\wedge\cdots\wedge\widehat{dx^i}\wedge\cdots\wedge dx^n.$$

(2°) $d\omega=0$，即 ω 是闭形式。

(3°) ω 限制在 $S^{n-1}(r_0)=\left\{(x^1,\cdots,x^n)\mid\sum_{i=1}^{n}(x^i)^2=r_0^2,r_0>0\right\}$ 上有

$$\omega=\frac{dV}{r_0^{n-1}}.$$

(4°) $\int_{\overrightarrow{S^{(n-1)}(r_0)}}\omega=\frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$ ($S^{n-1}(1)$的体积)，于是推出了 ω 和 dV 都不是恰当的。

8. (1°) 设 M_1 和 M_2 是 C^∞ 流形，$F: M_1\to M_2$ 是 C^∞ 浸入。证明

$$F_{*p}:\ T_p(M_1)\to F_{*p}(T_p(M_1))\subset T_{F(p)}(M_2)$$

是一个同构。

(2°) 如果(1°) 中(M_2,g)是 C^∞ Riemann 流形，则(M_1,F^*g)也是 C^∞ Riemann 流形。

因而 Riemann 流形的任何子流形也是 Riemann 流形。试举出一些 R^n 中子 Riemann 流形的例子。

(3°) 设(M_1,I^*g)是(M_2,g)的子 Riemann 流形，它们分别导出的度量(距离)函数为 ρ_1 和 ρ_2，对任何 $p,q\in M$，是否恒有 $\rho_1(p,q)=\rho_2(p,q)$?

9*. 证明定义 3 中的

$\inf\{|\sigma|\mid\sigma$ 是连接 p 和 q 的分段 C^∞ 曲线，且在各段上处处 $T_\sigma\neq0\}$

$=\inf\{|\sigma|\mid\sigma$ 是连接 p 和 q 的分段 C^∞ 曲线$\}$。

10. 设(M_1,g_1)和(M_2,g_2) 都是 C^∞ 的 Riemann 流形。从而 C^∞ 流形 $M_1\times M_2$ 有如下给出的一个 Riemann 度量 $g=g_1\times g_2$：对$(x,y)\in M_1\times M_2$，切空间 $T_{(x,y)}(M_1\times M_2)$同构于$T_x(M_1)\times T_y(M_2)$，则令

$$g((X_1,X_2),(Y_1,Y_2))=g_1(X_1,Y_1)+g_2(X_2,Y_2),$$

验证 g 是 $M_1\times M_2$ 上的一个 C^∞ Riemann 度量。且

$$g((X_1,0),(0,Y_2))=0,$$

即$(X_1,0)$与$(0,Y_2)$正交。

11*. 设 f 是 C^∞ 的 Riemann 流形 $(M,\langle\ ,\ \rangle)$ 上的 C^∞ 函数，f 的梯度(gradient) grad f 由恒等式 $\langle X,\mathrm{grad}\,f\rangle=Xf\ (X\in\mathscr{X}(M))$ 定义，证明：

(1°) $\mathrm{grad}\,f\in\mathscr{X}(M)$;

(2°) 如果 M 紧致，则 grad f 至少在两点为 0;

(3°) 设 σ: $R\to M$ 为 C^∞ 曲线，记 $T_\sigma(t)=\frac{d\sigma}{dt}$，则 $\left\langle\frac{d\sigma}{dt},\operatorname{grad} f\right\rangle=\frac{df(\sigma(t))}{dt}$.

(4°) 在$\{x^i\}$中，$\operatorname{grad} f=\sum_{i=1}^{n}\alpha^i\frac{\partial}{\partial x^i}$，求 α^i.

(5°) 设 $(R^n,\langle,\rangle)$ 是通常的 Riemann 流形，在整体坐标系 $\{x^i\}$ 中，$\left\langle\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}\right\rangle=\delta^i_j$，写出 grad f 的表达式.

(6°) 证明 grad f 是 C^∞ 的.

8.2 仿射联络和 Riemann 联络 ∇

1. 仿射联络 ∇

定义 1 所谓 n 维 C^∞ 流形 M 上的一个**仿射联络**是一个法则 ∇，它对每个 $X\in\mathscr{X}(M)$对应着一个映射

$$\nabla_X:\mathscr{X}(M)\to\mathscr{X}(M),$$
$$Y\to\nabla_X Y,$$

且满足以下四个条件：

(1°) $\nabla_X(Y+Z)=\nabla_X Y+\nabla_X Z$;

(2°) $\nabla_{X+Y}Z=\nabla_X Z+\nabla_Y Z$;

(3°) $\nabla_{fX}Y=f\nabla_X Y$;

(4°) $\nabla_X(fY)=f\nabla_X Y+(Xf)Y$.

这里 $f\in C^\infty(M)$, X, Y, $Z\in\mathscr{X}(M)$. 算符 ∇_X 称为关于 X 的**协变微分**或**协变导数**.

引理 1 设 n 维 C^∞ 流形 M 有一个仿射联络 ∇，U 是 M 的开子流形，$X,Y\in\mathscr{X}(M)$. 如果$X|_U=0$ 或 $Y|_U=0$，则 $\nabla_X Y|_U=0$.

证明 设$Y|_U=0$，$p\in U$，$g\in C^\infty(M)$，为了证明$((\nabla_X Y)g)(p)=0$，我们选择 $f\in C^\infty(M)$ 使得 $f(p)=0$ 和 $f|_{M-U}=1$. 则 $fY=Y$ 和

$$(\nabla_X Y)g=\nabla_X(fY)g=(Xf)(Yg)+f\cdot(\nabla_X Y)g,$$

它在 p 点为 0。关于 $X|_U=0$ 类似证明(留作习题)。 #

注 M 上的一个仿射联络 ∇ 诱导了 M 的任意开子流形 U 上的一个仿射联络 ∇_U。事实上，设 $X, Y\in\mathscr{X}(U)$，对每个 $p\in U$，存在 $X', Y'\in\mathscr{X}(M)$，使得 $X'|_V=X|_V$，$Y'|_V=Y|_V$，其中 V 是 p 的邻域。我们令 $(\nabla_{U_X}Y)_q=(\nabla_{X'}Y')_q$，$q\in V$。由引理 1，这等式的右边是与 X', Y' 的选取无关的。这就立即可推出法则 ∇_U 是 U 上的一个仿射联络。

特别地，在局部坐标系 (U,φ)，$\{x^i\}$ 中，我们由

$$\Delta_{U\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^j}=\sum_k\Gamma^k_{ij}\frac{\partial}{\partial x^k} \tag{1}$$

定义了 U 上的联络系数(Christoffel 函数) Γ^k_{ij}。如果 (V,ψ)，$\{y^i\}$ 是另一局部坐标系，我们由

$$\nabla_{V\frac{\partial}{\partial y^\alpha}}\frac{\partial}{\partial y^\beta}=\sum_\gamma\tilde{\Gamma}^\gamma_{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial y^\gamma}$$

定义了 V 上的联络系数 $\Gamma'^{\gamma}_{\alpha\beta}$。利用联络的四个条件，在 $U\cap V$ 中，我们容易得到(留作习题)，

$$\tilde{\Gamma}^\gamma_{\alpha\beta}=\sum_{i,j,k}\frac{\partial x^i}{\partial y^\alpha}\frac{\partial x^j}{\partial y^\beta}\frac{\partial y^\gamma}{\partial x^k}\Gamma^k_{ij}+\sum_j\frac{\partial^2 x^j}{\partial y^\alpha\partial y^\beta}\frac{\partial y^\gamma}{\partial x^j}. \tag{2}$$

另一方面，如果已给 M 的一个局部坐标邻域 U 的覆盖和在每个邻域中的一组函数 Γ^k_{ij}，使得在任何两个相交的邻域的公共部分中(2)式成立。则我们可以由(1)式定义 $\nabla_{U\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^j}$，因此，在每个局部坐标邻域 U 中得到了一个仿射联络 ∇_U。最后，我们在 M 上定义一个仿射联络 ∇ 如下：设 $X, Y\in\mathscr{X}(M)$ 和 $p\in M$。如果 U 是 p 的一个局部坐标邻域，令

$$(\nabla_X Y)_p=(\nabla_{U_{X_1}}Y_1)_p,$$

这里 X_1 和 Y_1 分别是 X 和 Y 在 U 上的限制. 则 ∇ 是 M 上的一个仿射联络,它在每个坐标邻域 U 上诱导出联络 ∇_U. 在不致混淆的情形下,仍记 ∇_U 为 ∇.

引理 2 设 $X,Y\in\mathscr{X}(M)$, $p\in M$, $X_p=0$,则 $(\nabla_X Y)_p=0$.

证明 设 (U,φ), $\{x^i\}$ 是 p 的局部坐标系, 令 $X=\sum\limits_i f^i\dfrac{\partial}{\partial x^i}$, $f^i\in C^\infty(U)$, $f^i(p)=0(1\leqslant i\leqslant n)$. 选取 $X_i\in\mathscr{X}(M)$, $g^i\in C^\infty(M)$, 使 $X_i\Big|_V=\dfrac{\partial}{\partial x^i}\Big|_V$, $g^i|_V=f^i|_V$, 其中 V 是 p 的邻域. 则 $(\nabla_X Y)_p=$ $(\nabla_{\sum\limits_i g^iX_i}Y)_p=\sum\limits_i g^i(p)(\nabla_{X_i}Y)_p=\sum\limits_i 0\cdot(\nabla_{X_i}Y)_p=0$. #

引理 3 设 $X,Y\in\mathscr{X}(M)$, $p\in M$, σ 是 C^∞ 曲线, $\sigma(0)=p$, $T_\sigma(0)=X_p$. 则 $(\nabla_X Y)_p$ 由 X_p 和 $Y(\sigma(t))$ 完全决定.

证明 取 p 的局部坐标系 (U,φ), $\{x^i\}$, 设

$$X=\sum_i\alpha^i\frac{\partial}{\partial x^i},\quad Y=\sum_j\beta^j\frac{\partial}{\partial x^j},$$

则

$$\begin{aligned}(\nabla_X Y)_p&=\Big(\nabla_{\sum\limits_i\alpha^i\frac{\partial}{\partial x^i}}\sum_j\beta^j\frac{\partial}{\partial x^j}\Big)_p=\sum_j\Big[(X_p(\beta^j)\Big(\frac{\partial}{\partial x^j}\Big)_p\\&\quad+\beta^j(p)\sum_i\alpha^i(p)\Big(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^j}\Big)_p\Big]\\&=\sum_j\Big[\frac{d\beta^j(\sigma(t))}{dt}\Big|_{t=0}\Big(\frac{\partial}{\partial x^j}\Big)_p\\&\quad+\beta^j(p)\sum_i\alpha^i(p)\Big(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^j}\Big)_p\Big],\end{aligned}\tag{3}$$

从上式还可看出, $(\nabla_X Y)_p$ 与切于 X_p 的 σ 的选取无关. #

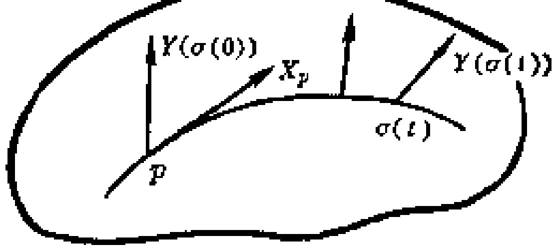


图 76

注 如果 σ 是 M 中的 C^∞ 曲线，$T(t)=T_\sigma(t)$，$Y(t)\in T_{\sigma(t)}(M)$，且 $Y(t)$ 关于 t 是 C^∞ 的．在局部坐标系中，设

$$T(t)=\sum_i \alpha^i(t)\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{\sigma(t)},\ Y(t)=\sum_j \beta^j(t)\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_{\sigma(t)},$$

则定义

$$(\nabla_T Y)(t)=\sum_j\left[\frac{d\beta^j}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_{\sigma(t)}\right.$$

$$\left.+\beta^j(t)\sum_i \alpha^i(t)\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_{\sigma(t)}\right],$$

容易验证它与局部坐标系的选取无关(留作习题)．

定义 2 设 σ 是 M 中的 C^∞ 曲线，$T=T_\sigma$，$Y(t)\in T_{\sigma(t)}(M)$，$Y(t)$ 关于 t 是 C^∞ 的．如果 $\nabla_T Y=0$，则称 $Y(t)$ 是**沿 σ 平行的**．如果 $\nabla_T T=0$，则称 σ 是**一条测地线**．一条测地线称为**最大的**，如果它不是任何测地线的真限制．

定理 1 设 σ 是定义在 $[a,b]$ 上的 C^∞ 曲线，$T=T_\sigma$，则对任何 $Y\in T_{\sigma(a)}(M)$，存在 σ 上的唯一的一个 $Y(t)\in T_{\sigma(t)}(M)$，使得 $Y(a)=Y$，$Y(t)$ 关于 t 是 C^∞ 的，且 $Y(t)$ 是沿 σ 平行的．

证明 设 (U,φ)，$\{x^i\}$ 是 $\sigma(a)$ 的局部坐标系，在 U 上，

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^j}=\sum_k \Gamma_{ij}^k\frac{\partial}{\partial x^k},\ x^i(t)=x^i(\sigma(t)),$$

$$T(t)=T_{\sigma}(t)=\sum_i \frac{dx^i}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{\sigma(t)},$$

$$Y(t)=\sum_i Y^i(t)\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{\sigma(t)},$$

若 $Y(t)$沿 σ 平行，即$\nabla_T Y=0$，则

$$0=\nabla_T Y=\sum_j\left[\frac{dY^j}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_{\sigma(t)}+Y^j\sum_i\frac{dx^i}{dt}\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_{\sigma(t)}\right]$$

$$=\sum_j\left[\frac{dY^j}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_{\sigma(t)}+Y^j\sum_{i,k}\frac{dx^i}{dt}\Gamma^k_{ij}\left(\frac{\partial}{\partial x^k}\right)_{\sigma(t)}\right]$$

$$=\sum_k\left[\frac{dY^k}{dt}+\sum_{i,j}\Gamma^k_{ij}\frac{dx^i}{dt}Y^j\right]\left(\frac{\partial}{\partial x^k}\right)_{\sigma(t)}$$

$$\Longleftrightarrow\frac{dY^k}{dt}+\sum_{i,j}\Gamma^k_{ij}\frac{dx^i}{dt}Y^j=0,k=1,2,\cdots,n.\text{（向量的平移方程）}\tag{4}$$

因为初始条件 $Y(a)=Y$ 确定了 n 个初始值 $Y^i(a)$，由线性常微分方程组解的存在性和唯一性定理，以及利用延拓的方法可以得到沿 σ 平行的唯一的 C^∞ 向量场 $Y(t)$. #

如果 σ 是一条测地线，即$\nabla_T T=0$，于是在局部坐标系(U,φ)，$\{x^i\}$中，

$$0=\nabla_T T=\sum_k\left[\frac{d^2x^k}{dt^2}+\sum_{i,j}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}\Gamma^k_{ij}\right]\left(\frac{\partial}{\partial x^k}\right)_{\sigma(t)}$$

$$\Longleftrightarrow\frac{d^2x^k}{dt^2}+\sum_{i,j}\Gamma^k_{ij}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}=0,k=1,\cdots,n,\text{（测地线方程）}\tag{5}$$

定理 2 设 n 维 C^∞ 流形 M 有一个仿射联络∇. $p\in M$,

$X\in T_p(M)$，则在M中存在一条唯一的最大测地线$\sigma(t)$，使得

$$\sigma(0)=p,\ T_\sigma(0)=X.$$

证明 设(U,φ)，$\{x^i\}$是p的局部坐标系，使得

$$\varphi(U)=\{(x^1,\cdots,x^n)\mid |x^i|<c\}$$

和$\varphi(p)=0$．则X可以表示为

$$X=\sum_i \alpha^i\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p,\ \alpha^i\in R.$$

我们考察微分方程组

$$\begin{cases}\dfrac{dx^i}{dt}=z^i \quad (1\leqslant i\leqslant n),\\[2ex] \dfrac{dz^k}{dt}=-\sum\limits_{i,j=1}^{n}\Gamma^k_{ij}(x^1,\cdots,x^m)\,z^iz^j\ (1\leqslant k\leqslant n),\\[2ex] (x^1,\cdots,x^n,z^1,\cdots,z^n)_{t=0}=(0,\cdots,0,\alpha^1,\cdots,\alpha^n).\end{cases}$$

设c_1,K满足$0<c_1<c$，$0<K<+\infty$．在$|x^i|<c_1$，$|z^i|<K$ $(1\leqslant i\leqslant n)$中，上述方程组的右边满足 Lipschitz 条件．从常微分方程组解的存在性和唯一性定理，我们可以得到：

存在常数$b_1>0$和C^∞函数$x^i(t),z^i(t)$ $(1\leqslant i\leqslant n,|t|<b_1)$使得

(1°) $\dfrac{dx^i(t)}{dt}=z^i(t)\quad(1\leqslant i\leqslant n),|t|<b_1;$

$$\frac{dz^k(t)}{dt}=-\sum_{i,j=1}^{n}\Gamma^k_{ij}(x^1(t),\cdots,x^n(t))z^i(t)z^j(t)$$

$$(1\leqslant k\leqslant n),\ |t|<b_1;$$

(2°) $(x^1(t),\cdots,\ x^n(t),\ z^1(t),\cdots,\ z^n(t))_{t=0}$ $=(0,\cdots,0,\alpha^1,\cdots,\alpha^n);$

(3°) $|x^i(t)|<c_1$，$|z^i(t)|<K\ \ (1\leqslant i\leqslant n),|t|<b_1;$

(4°) $x^i(t),z^i(t)(1\leqslant i\leqslant n)$是满足条件$(1^\circ)$，$(2^\circ)$和$(3^\circ)$的

唯一的函数组.

这就证明了存在一条满足条件 $\sigma(0)=p, T_\sigma(0)=X$ 的 M 中的测地线 $\sigma(t)$. 并且任何两条这样的测地线在 $t=0$ 的某个区间内是重合的. 此外,从(4')我们可以得到,如果两条测地线 $\sigma_1(t)$ $(t\in I_1)$和 $\sigma_2(t)$ $(t\in I_2)$在某个开区间上重合,则它们在 $I_1\cap I_2$ 上也重合. 于是,立即得到定理 2 的结论. #

2. Cartan 结构方程

设 n 维 C^∞ 流形 M 有一个仿射联络 ∇. 我们定义

$$T(X,Y)=\nabla_X Y-\nabla_Y X-[X,Y],$$

$$R(X,Y)=\nabla_X\nabla_Y-\nabla_Y\nabla_X-\nabla_{[X,Y]},$$

$$R(X,Y)Z=\nabla_X\nabla_Y Z-\nabla_Y\nabla_X Z-\nabla_{[X,Y]}Z,$$

这里 $X,Y,Z\in\mathscr{X}(M)$.

显然, $T(X,Y)=-T(Y,X)$和$R(X,Y)=-R(Y,X)$. 容易验证 $T(fX,gY)=fgT(X,Y)$ 和 $R(fX,gY)(hZ)=fghR(X,Y)Z$, $f,g,h\in C^\infty(M)$, $X,Y,Z\in\mathscr{X}(M)$ (留作习题). 由第二章§5.1 习题 12 和定理 3,偏线性映射

$$\mathscr{X}(M)\times\mathscr{X}(M)\longrightarrow\mathscr{X}(M),$$
$$(X,Y)\longrightarrow T(X,Y)$$

和

$$\mathscr{X}(M)\times\mathscr{X}(M)\times\mathscr{X}(M)\longrightarrow\mathscr{X}(M),$$
$$(X,Y,Z)\longrightarrow R(X,Y)Z$$

分别确定了(1,2)型张量场 T 和 (1,3) 型张量场 R. T 称为**挠张量场**, R 称为**曲率张量场**.

设 $p\in M$, U_p 是 p 的邻域, $X_1,\cdots,X_n$ 是 U_p 上的 C^∞ 基向量场,则任何 $X\in\mathscr{X}(U_p)$, 有

$$X=\sum_i f^i X_i,\ f^i\in C^\infty(U_p).$$

在 U_p 上，我们由公式

$$\nabla_{X_i} X_j = \sum_k \Gamma^k_{ij} X_k,$$

$$T(X_i, X_j) = \sum_k T^k_{ij} X_k,$$

$$R(X_i, X_j) X_l = \sum_k R^k_{lij} X_k$$

定义了 C^∞ 函数 $\Gamma^k_{ij}, T^k_{ij}, R^k_{lij}$。如果令

$$[X_j, X_k] = \sum_i c^i_{jk} X_i,\ c^i_{jk} \in C^\infty(U_p).$$

则有

引理 4 (1°) $T^i_{jk} = -T^i_{kj},\ R^k_{lij} = -R^k_{lji}$,

(2°) $T^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} - \Gamma^i_{kj} - c^i_{jk}$.

(3°) $R^k_{lij} = \sum_s (\Gamma^s_{jl}\Gamma^k_{is} - \Gamma^s_{il}\Gamma^k_{js}) + X_i \cdot \Gamma^k_{jl} - X_j \cdot \Gamma^k_{il}$

$- \sum_s c^s_{ij} \Gamma^k_{sl}$.

证明 (1°) 由 $\sum_i T^i_{jk} X_i = T(X_j, X_k) = -T(X_k, X_j) = -\sum_i T^i_{kj} X_i$ 和 $\sum_k R^k_{lij} X_k = R(X_i, X_j) X_l = -R(X_j, X_i) X_l = -\sum_k R^k_{lji} X_k$

推出 $T^i_{jk} = -T^i_{kj}$ 和 $R^k_{lij} = -R^k_{lji}$.

(2°) 由 $\sum_i T^i_{jk} X_i = T(X_j, X_k) = \nabla_{X_j} X_k - \nabla_{X_k} X_j - [X_j, X_k]$

$$= \sum_i (\Gamma^i_{jk} - \Gamma^i_{kj} - c^i_{jk}) X_i$$

推出 $T^i_{jk}=\Gamma^i_{jk}-\Gamma^i_{kj}-c^i_{jk}$。

(3°) 由 $\sum_k R^k_{lij}X_k=R(X_i,X_j)X_l=\nabla_{X_i}\nabla_{X_j}X_l-\nabla_{X_j}\nabla_{X_i}X_l$

$-\nabla_{[X_i,X_j]}X_l$

$$=\nabla_{X_i}\left(\sum_s\Gamma^s_{jl}X_s\right)-\nabla_{X_j}\left(\sum_s\Gamma^s_{il}X_s\right)-\nabla_{\sum_s c^s_{ij}X_s}X_l$$

$$=\sum_s\Gamma^s_{jl}\sum_k\Gamma^k_{is}X_k+\sum_s(X_i\cdot\Gamma^s_{jl})X_s-\sum_s\Gamma^s_{il}\sum_k\Gamma^k_{js}X_k$$

$$-\sum_s(X_j\cdot\Gamma^s_{il})X_s-\sum_s c^s_{ij}\sum_k\Gamma^k_{sl}X_k$$

$$=\sum_k\left[\sum_s(\Gamma^s_{jl}\Gamma^k_{is}-\Gamma^s_{il}\Gamma^k_{js})+X_i\cdot\Gamma^k_{jl}-X_j\cdot\Gamma^k_{il}\right.$$

$$\left.-\sum_s c^s_{ij}\Gamma^k_{sl}\right]X_k$$

推出所要求的公式。 #

注 如果 U_p 是局部坐标邻域，$X_i=\dfrac{\partial}{\partial x^i}(i=1,\cdots,n)$是坐标基向量场，则$\left[\dfrac{\partial}{\partial x^j},\dfrac{\partial}{\partial x^k}\right]=0,c^i_{jk}=0$。于是上述公式就成为

$$T^i_{jk}=\Gamma^i_{jk}-\Gamma^i_{kj},$$

$$R^k_{lij}=\sum_s(\Gamma^s_{jl}\Gamma^k_{is}-\Gamma^s_{il}\Gamma^k_{js})+\frac{\partial}{\partial x^i}\Gamma^k_{jl}-\frac{\partial}{\partial x^j}\Gamma^k_{il}.$$

设 $\omega^i,\omega^i_j(1\leqslant i,j\leqslant n)$是 U_p 上的 C^∞1-形式，它们由

$$\omega^i(X_j)=\delta^i_j,\quad \omega^i_j=\sum_k\Gamma^i_{kj}\omega^k$$

定义。很清楚，ω^i_j 由 U_p 上的函数 Γ^i_{kj}，因而由联络 ∇ 确定。另一方面，如下面定理所指出的，ω^i_j 可由曲率张量场表示。

定理 3 (Cartan 结构方程)

$$d\omega^i = -\sum_s \omega^i_s \wedge \omega^s + \frac{1}{2}\sum_{j,k} T^i_{jk}\omega^j \wedge \omega^k,$$

$$d\omega^i_l = -\sum_s \omega^i_s \wedge \omega^s_l + \frac{1}{2}\sum_{j,k} R^i_{ljk}\omega^j \wedge \omega^k.$$

证明 由$\left(-\sum_s \omega^i_s \wedge \omega^s + \frac{1}{2}\sum_{j,k} T^i_{jk}\omega^j \wedge \omega^k\right)(X_l, X_h) =$

$$-\sum_s [\omega^i_s(X_l)\omega^s(X_h) - \omega^i_s(X_h)\omega^s(X_l)]$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{j,k} T^i_{jk}[\omega^j(X_l)\omega^k(X_h) - \omega^j(X_h)\omega^k(X_l)]$$

$$= -\sum_{s,k} [\Gamma^i_{ks}\delta^k_l\delta^s_h - \Gamma^i_{ks}\delta^k_h\delta^s_l] + \frac{1}{2}\sum_{j,k} T^i_{jk}[\delta^j_l\delta^k_h - \delta^j_h\delta^k_l]$$

$$= -\Gamma^i_{lh} + \Gamma^i_{hl} + \frac{1}{2}[T^i_{lh} - T^i_{hl}] = \Gamma^i_{hl} - \Gamma^i_{lh} + \Gamma^i_{lh}$$

$$-\Gamma^i_{hl} - c^i_{lh} = 0 - 0 - c^i_{lh} = X_l \cdot \omega^i(X_h) - X_h \cdot \omega^i(X_l)$$

$$-\omega^i([X_l, X_h]) = d\omega^i(X_l, X_h)$$

推出第一个等式。

再由$\left(-\sum_s \omega^i_s \wedge \omega^s_l + \frac{1}{2}\sum_{j,k} R^i_{ljk}\omega^j \wedge \omega^k\right)(X_m, X_h) =$

$$-\sum_s [\omega^i_s(X_m)\omega^s_l(X_h) - \omega^i_s(X_h)\omega^s_l(X_m)]$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{j,k} R^i_{ljk}[\omega^j(X_m)\omega^k(X_h) - \omega^j(X_h)\omega^k(X_m)]$$

$$= -\sum_s \left[\sum_k \Gamma^i_{ks}\delta^k_m \cdot \sum_t \Gamma^s_{tl}\delta^t_h - \sum_k \Gamma^i_{ks}\delta^k_h \cdot \sum_t \Gamma^s_{tl}\delta^t_m\right]$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{j,k}R^{i}_{ljk}[\delta^{j}_{m}\delta^{k}_{h}-\delta^{j}_{h}\delta^{k}_{m}]=-\sum_{s}\Gamma^{i}_{ms}\Gamma^{s}_{hl}$$

$$+\sum_{s}\Gamma^{i}_{hs}\Gamma^{s}_{ml}+R^{i}_{lmh}=X_{m}\cdot\Gamma^{i}_{hl}-X_{h}\cdot\Gamma^{i}_{ml}-\sum_{s}c^{s}_{mh}\Gamma^{i}_{sl}$$

$$=X_{m}\cdot\Gamma^{i}_{hl}-X_{h}\cdot\Gamma^{i}_{ml}-\sum_{k,s}\Gamma^{i}_{kl}c^{s}_{mh}\delta^{k}_{s}$$

$$=X_{m}\cdot\left(\sum_{k}\Gamma^{i}_{kl}\delta^{k}_{h}\right)-X_{h}\cdot\left(\sum_{k}\Gamma^{i}_{kl}\delta^{k}_{m}\right)-\left(\sum_{k}\Gamma^{i}_{kl}\omega^{k}\right)\left(\sum_{s}c^{s}_{mh}X_{s}\right)$$

$$=X_{m}\cdot\omega^{i}_{l}(X_{h})-X_{h}\cdot\omega^{i}_{l}(X_{m})-\omega^{i}_{l}([X_{m},X_{h}])$$

$$=d\omega^{i}_{l}(X_{m},X_{h})$$

推出第二个等式. #

3. Riemann 联络

定义 3 在 C^{∞} 的 Riemann 流形 $(M,\langle,\rangle)$ 上的一个仿射联络 ∇，如果满足：

(5°) 挠张量 $T=0$，即对任何 $X,Y\in\mathscr{X}(M)$，$\nabla_{X}Y-\nabla_{Y}X-[X,Y]=0$；

(6°) 对任何 $X,Y,Z\in\mathscr{X}(M)$，$Z\langle X,Y\rangle=\langle\nabla_{Z}X,Y\rangle+\langle X,\nabla_{Z}Y\rangle$，则称它为 $(M,\langle,\rangle)$ 上的 **Riemann 联络**.

引理 5 (1°) C^{∞} 流形 M 上的一个满足条件(5°)的联络 ∇（称为**对称联络**）$\Longleftrightarrow$对任何局部坐标系 $\{x^{i}\}$ 和坐标基向量场 $\left\{\frac{\partial}{\partial x^{i}}\right\}$，$\Gamma^{k}_{ij}=\Gamma^{k}_{ji}(i,j,k=1,\cdots,n)$.

(2°) C^{∞} 流形 M 上的一个满足条件(6°)的联络 $\nabla\Longleftrightarrow$对任何局部坐标系 $\{x^{i}\}$ 和坐标基向量场 $\left\{\frac{\partial}{\partial x^{i}}\right\}$，有

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^{k}}=\sum_{l}g_{lj}\Gamma^{l}_{ki}+\sum_{l}g_{il}\Gamma^{l}_{kj}\quad(i,j,k=1,\cdots,n)$$

$\Longleftrightarrow$平行移动下保持内积不变.

证明 (1°) 条件(5°): $T(X,Y)=\nabla_X Y-\nabla_Y X-[X,Y]=0$ (任何 $X,Y\in\mathscr{X}(M)$)$\Longleftrightarrow$对任何$\{x^i\}$, $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\right\}$,

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^j}-\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}}\frac{\partial}{\partial x^i}-\left[\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}\right]$$

$$=\sum_k(\Gamma^k_{ij}-\Gamma^k_{ji})\frac{\partial}{\partial x^k}=0\Longleftrightarrow\Gamma^k_{ij}=\Gamma^k_{ji}(i,j,k=1,\cdots,n).$$

(2°) 条件(6°): $Z\langle X,Y\rangle=\langle\nabla_Z X,Y\rangle+\langle X,\nabla_Z Y\rangle$(任何 X, $Y,Z\in\mathscr{X}(M)$)$\Longleftrightarrow$对任何$\{x^i\}$, $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\right\}$, $\frac{\partial}{\partial x^k}\left\langle\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}\right\rangle$

$$=\left\langle\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}}\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}\right\rangle+\left\langle\frac{\partial}{\partial x^i},\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}}\frac{\partial}{\partial x^j}\right\rangle$$

$$\Longleftrightarrow\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}=\sum_l g_{lj}\Gamma^l_{ki}+\sum_l g_{il}\Gamma^l_{kj}\quad(i,j,k=1,\cdots,n).$$

设 $X(t)=\sum_i\alpha^i(t)\frac{\partial}{\partial x^i}$, $Y(t)=\sum_i\beta^i(t)\frac{\partial}{\partial x^i}$是沿 C^∞曲线 $\sigma(t)$的关于 t 的 C^∞ 向量场, $T_\sigma(t)=\sum_i\frac{dx^i}{dt}\frac{\partial}{\partial x^i}$, 其中 $x^i(t)$ 是 $\sigma(t)$的坐标. 如果 $X(t)$和 $Y(t)$沿 σ 平行, 则

$$\frac{d\alpha^i}{dt}+\sum_{j,k}\Gamma^i_{jk}\frac{dx^j}{dt}\alpha^k=0,$$

$$\frac{d\beta^i}{dt}+\sum_{j,k}\Gamma^i_{jk}\frac{dx^j}{dt}\beta^k=0.$$

于是, 平行移动下保持内积不变, 即 $\langle X(t),Y(t)\rangle=$常数

$$\Longleftrightarrow 0=\frac{d}{dt}\langle X(t),Y(t)\rangle$$

$$=\frac{d}{dt}\Big(\sum_{i,j} g_{ij}\alpha^i\beta^j\Big)=\sum_{i,j}\frac{dg_{ij}}{dt}\alpha^i\beta^j+\sum_{i,j}g_{ij}\frac{d\alpha^i}{dt}\beta^j$$

$$+\sum_{i,j}g_{ij}\alpha^i\frac{d\beta^j}{dt}=\sum_{i,j}\frac{dg_{ij}}{dt}\alpha^i\beta^j-\sum_{i,j}g_{ij}\Big(\sum_{k,l}\Gamma^i_{kl}\frac{dx^k}{dt}\alpha^l\Big)\beta^j$$

$$-\sum_{i,j}g_{ij}\alpha^i\Big(\sum_{k,l}\Gamma^j_{kl}\frac{dx^k}{dt}\beta^l\Big)=\sum_{i,j}\Big(\frac{dg_{ij}}{dt}-\sum_{l,k}g_{lj}\Gamma^l_{ki}\frac{dx^k}{dt}$$

$$-\sum_{l,k}g_{il}\Gamma^l_{kj}\frac{dx^k}{dt}\Big)\alpha^i\beta^j,\quad (\text{任何 } \sigma(t), X(t), Y(t)) \Longleftrightarrow \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}$$

$$=\sum_l g_{lj}\Gamma^l_{ki}+\sum_l g_{il}\Gamma^l_{kj}\quad (i,j,k=1,\cdots,n).\qquad \#$$

定理 4(Riemann 流形基本定理) 在 C^∞ Riemann 流形$(M,\langle,\rangle)$上存在唯一的一个 Riemann 联络 ∇.

证明 (唯一性) 设$(M,\langle,\rangle)$有 Riemann 联络 ∇，则

$$X\langle Y,Z\rangle+Y\langle Z,X\rangle-Z\langle X,Y\rangle=\langle\nabla_XY,Z\rangle+\langle Y,\nabla_XZ\rangle$$
$$+\langle\nabla_YZ,X\rangle+\langle Z,\nabla_YX\rangle-\langle\nabla_ZX,Y\rangle-\langle X,\nabla_ZY\rangle=\langle\nabla_XY,Z\rangle$$
$$+\langle Y,[X,Z]\rangle+\langle[Y,Z],X\rangle+\langle Z,\nabla_XY\rangle+\langle Z,[Y,X]\rangle,$$
$$2\langle\nabla_XY,Z\rangle=X\langle Y,Z\rangle+Y\langle Z,X\rangle-Z\langle X,Y\rangle-\langle Y,[X,Z]\rangle$$
$$-\langle X,[Y,Z]\rangle-\langle Z,[Y,X]\rangle \tag{6}$$

由于(6)式对任何 Z 成立，因此它唯一确定了 ∇_XY，即$(M,\langle,\rangle)$上若有 Riemann 联络一定是唯一的.

(存在性) 为了证明 Riemann 联络的存在性，我们自然从(6)式出发定义 ∇_XY(它在 M 上是整体的). 由于 Z 是任取的，并且通过(6)式作简单的计算可知 ∇ 满足仿射联络的四个条件(留作习题). 此外，由

$$2\langle\nabla_XY-\nabla_YX-[X,Y],Z\rangle=\{X\langle Y,Z\rangle+Y\langle Z,X\rangle-Z\langle X,Y\rangle$$
$$-\langle Y,[X,Z]\rangle-\langle X,[Y,Z]\rangle-\langle Z,[Y,X]\rangle\}-\{Y\langle X,Z\rangle$$

$$+X\langle Z,Y\rangle-Z\langle Y,X\rangle-\langle X,[Y,Z]\rangle-\langle Y,[X,Z]\rangle$$
$$-\langle Z,[X,Y]\rangle\}-2\langle [X,Y],Z\rangle=0$$

和

$$2\langle\nabla_Z X,Y\rangle+2\langle\nabla_Z Y,X\rangle=\{Z\langle X,Y\rangle+X\langle Y,Z\rangle-Y\langle Z,X\rangle$$
$$-\langle X,[Z,Y]\rangle-\langle Z,[X,Y]\rangle-\langle Y,[X,Z]\rangle\}+\{Z\langle Y,X\rangle$$
$$+Y\langle X,Z\rangle-X\langle Z,Y\rangle-\langle Y,[Z,X]\rangle-\langle Z,[Y,X]\rangle$$
$$-\langle X,[Y,Z]\rangle\}=2Z\langle X,Y\rangle$$

可推出 ∇ 满足 Riemann 联络的条件(5°)和(6°)。 #

注：定理 4 的另一证明参看习题 5.

4. Riemann-Christoffel 曲率张量和截曲率

定义 4 设 ∇ 是 C^∞ Riemann 流形 $(M,\langle\ ,\ \rangle)$ 上的 Riemann 联络. 我们令

$K(X_1,X_2,X_3,X_4)=\langle X_1,R(X_3,X_4)X_2\rangle$, $X_1,X_2,X_3,X_4\in\mathscr{X}(M)$.

显然 K 是 M 上的(0,4)型 C^∞ 张量场,称为 **Riemann-Christoffel 曲率张量**.

引理 6 设 $X_1,X_2,X_3,X_4\in\mathscr{X}(M)$, 则有

(1°) $R(X_1,X_2)X_3+R(X_3,X_1)X_2+R(X_2,X_3)X_1=0$ (Bianchi 第一恒等式).

$K(X_1,X_2,X_3,X_4)+K(X_1,X_3,X_4,X_2)+K(X_1,X_4,X_2,X_3)=0$.

(2°) $K(X_1,X_2,X_3,X_4)=-K(X_2,X_1,X_3,X_4)$.

(3°) $K(X_1,X_2,X_3,X_4)=-K(X_1,X_2,X_4,X_3)$.

(4°) $K(X_1,X_2,X_3,X_4)=K(X_3,X_4,X_1,X_2)$.

证明 (1°) $R(X_1,X_2)X_3+R(X_3,X_1)X_2+R(X_2,X_3)X_1$

$$=\nabla_{X_1}\nabla_{X_2}X_3-\nabla_{X_2}\nabla_{X_1}X_3-\nabla_{[X_1,X_2]}X_3+\nabla_{X_3}\nabla_{X_1}X_2-\nabla_{X_1}\nabla_{X_3}X_2$$
$$-\nabla_{[X_3,X_1]}X_2+\nabla_{X_2}\nabla_{X_3}X_1-\nabla_{X_3}\nabla_{X_2}X_1-\nabla_{[X_2,X_3]}X_1=\nabla_{X_1}(\nabla_{X_2}X_3$$
$$-\nabla_{X_3}X_2)-\nabla_{[X_2,X_3]}X_1+\nabla_{X_2}(\nabla_{X_3}X_1-\nabla_{X_1}X_3)-\nabla_{[X_3,X_1]}X_2$$

$$+\nabla_{X_3}(\nabla_{X_1}X_2-\nabla_{X_2}X_1)-\nabla_{[X_1,X_2]}X_3=\nabla_{X_1}[X_2,X_3]-\nabla_{[X_2,X_3]}X_1$$

$$+\nabla_{X_2}([X_3,X_1])-\nabla_{[X_3,X_1]}X_2+\nabla_{X_3}([X_1,X_2])-\nabla_{[X_1,X_2]}X_3$$

$$=[X_1,[X_2,X_3]]+[X_2,[X_3,X_1]]+[X_3,[X_1,X_2]]=0.$$

$$K(X_1,X_2,X_3,X_4)+K(X_1,X_3,X_4,X_2)+K(X_1,X_4,X_2,X_3)$$

$$=\langle X_1,R(X_3,X_4)X_2+R(X_4,X_2)X_3+R(X_2,X_3)X_4\rangle=\langle X_1,0\rangle$$

$$=0.$$

(2°) $K(X_1,X_2,X_3,X_4)+K(X_2,X_1,X_3,X_4)$

$$=\langle X_1,R(X_3,X_4)X_2\rangle+\langle X_2,R(X_3,X_4)X_1\rangle=\langle X_1,\nabla_{X_3}\nabla_{X_4}X_2$$

$$-\nabla_{X_4}\nabla_{X_3}X_2-\nabla_{[X_3,X_4]}X_2\rangle+\langle X_2,\nabla_{X_3}\nabla_{X_4}X_1-\nabla_{X_4}\nabla_{X_3}X_1$$

$$-\nabla_{[X_3,X_4]}X_1\rangle=\{\langle X_1,\nabla_{X_3}\nabla_{X_4}X_2\rangle+\langle X_2,\nabla_{X_3}\nabla_{X_4}X_1\rangle$$

$$-\langle X_1,\nabla_{X_4}\nabla_{X_3}X_2\rangle-\langle X_2,\nabla_{X_4}\nabla_{X_3}X_1\rangle\}-\{\langle X_1,\nabla_{[X_3,X_4]}X_2\rangle$$

$$+\langle X_2,\nabla_{[X_3,X_4]}X_1\rangle\}=X_3X_4\langle X_1,X_2\rangle-X_4X_3\langle X_1,X_2\rangle$$

$$-[X_3,X_4]\langle X_1,X_2\rangle=0.$$

(3°) 由 $R(X_3,X_4)=-R(X_4,X_3)$ 得到。

(4°) 由(1°),(2°),(3°)得到

$$0=K(X_1,X_2,X_3,X_4)+K(X_1,X_3,X_4,X_2)+K(X_1,X_4,X_2,X_3)$$

$$-K(X_2,X_3,X_4,X_1)-K(X_2,X_4,X_1,X_3)-K(X_2,X_1,X_3,X_4)$$

$$-K(X_3,X_4,X_1,X_2)-K(X_3,X_1,X_2,X_4)-K(X_3,X_2,X_4,X_1)$$

$$+K(X_4,X_1,X_2,X_3)+K(X_4,X_2,X_3,X_1)+K(X_4,X_3,X_1,X_2)$$

$$=2K(X_1,X_2,X_3,X_4)-2K(X_3,X_4,X_1,X_2).$$

$$K(X_1,X_2,X_3,X_4)=K(X_3,X_4,X_1,X_2).\qquad \#$$

引理 7 设$\{X_i\}$为局部坐标邻域U中的C^∞基向量场，$R_{ijkl}=K(X_i,X_j,X_k,X_l)$，则

(1°) $R_{ijkl}=\sum\limits_s g_{is}R^s_{jkl}$.

(2°) $R_{ijkl}=-R_{jikl}$, $R_{ijkl}=-R_{ijlk}$, $R_{ijkl}=R_{klij}$.

$$R^s_{ijk}+R^s_{jki}+R^s_{kij}=0.$$

$$R_{ijkl}+R_{iklj}+R_{iljk}=0。$$

证明 利用引理6(留作习题). #

定义5 设 $X, Y\in T_p(M)$, $\langle X,X\rangle\langle Y,Y\rangle-\langle X,Y\rangle^2\neq 0$,令

$$\overline{K}(X,Y)=\frac{K(X,Y,X,Y)}{\langle X,X\rangle\langle Y,Y\rangle-\langle X,Y\rangle^2},$$

则

$\overline{K}(X,Y)=\overline{K}(aX+bY, cX+dY)$, $ad-bc\neq 0$(留作习题).于是我们可以定义由X和Y张成的$T_p(M)$中的2维平面$\pi=\widehat{XY}$的截曲率,记为

$$R(\pi)=R(\widehat{XY})=\frac{K(X,Y,X,Y)}{\langle X,X\rangle\langle Y,Y\rangle-\langle X,Y\rangle^2} \tag{7}$$

定理5 设$(M,\langle\,,\rangle)$为常曲率c(每点处的任何截曲率为c)的Riemann流形,

$K_1(X_1,X_2,X_3,X_4)=\langle X_1,X_3\rangle\langle X_2,X_4\rangle-\langle X_2,X_3\rangle\langle X_4,X_1\rangle$(显然$K_1$满足引理6中关于$K$的四个条件),则

$$K=cK_1。$$

$$R(X_1,X_2)X_3=c[\langle X_3,X_2\rangle X_1-\langle X_3,X_1\rangle X_2]。$$

证明 由$\dfrac{K(X_1,X_2,X_1,X_2)}{\langle X_1,X_1\rangle\langle X_2,X_2\rangle-\langle X_1,X_2\rangle^2}=c$,

$$\langle X_1,X_1\rangle\langle X_2,X_2\rangle-\langle X_1,X_2\rangle^2\neq 0,$$

我们得到 $K(X_1,X_2,X_1,X_2)=cK_1(X_1,X_2,X_1,X_2)$, $\langle X_1,X_1\rangle\langle X_2,X_2\rangle-\langle X_1,X_2\rangle^2\neq 0$. 因为$K$和$K_1$满足引理6中的四个条件,所以上式当$\langle X_1,X_1\rangle\langle X_2,X_2\rangle-\langle X_1,X_2\rangle^2=0$时(即$X_1=\lambda X_2$或$X_2=\lambda X_1$)也成立. 下面我们要证$K=cK_1$,即$K-cK_1=0$。为此,设

$$S=K-cK_1,$$

显然$S(X_1,X_2,X_1,X_2)=0$(任何$X_1,X_2\in\mathscr{X}(M)$).于是,我们有

$$0=S(X_1,X_2+X_4,X_1,X_2+X_4)=S(X_1,X_2,X_1,X_4)$$

$+S(X_1, X_4, X_1, X_2)=2\,S(X_1, X_2, X_1, X_4)$,

$S(X_1, X_2, X_1, X_4)=0$(任何 $X_1, X_2, X_4\in\mathscr{X}(M)$)。

从上式得到

$$
\begin{aligned}
0&=S(X_1+X_3, X_2, X_1+X_3, X_4)\\
&=S(X_1, X_2, X_3, X_4)+S(X_3, X_2, X_1, X_4)\\
&=S(X_1, X_2, X_3, X_4)-S(X_1, X_4, X_2, X_3),
\end{aligned}
$$

$S(X_1, X_2, X_3, X_4)=S(X_1, X_4, X_2, X_3)$,(任何$X_1, X_2, X_3, X_4\in\mathscr{X}(M)$)。

用 X_3, X_4, X_2 代替 X_2, X_3, X_4 得到

$S(X_1, X_2, X_3, X_4)=S(X_1, X_3, X_4, X_2)$(任何$X_1, X_2, X_3, X_4\in\mathscr{X}(M)$)

由上可推出

$$
\begin{aligned}
3\,S(X_1, X_2, X_3, X_4)&=S(X_1, X_2, X_3, X_4)\\
&+S(X_1, X_3, X_4, X_2)+S(X_1, X_4, X_2, X_3)=0,
\end{aligned}
$$

$S(X_1, X_2, X_3, X_4)=0$(任何 $X_1, X_2, X_3, X_4\in\mathscr{X}(M)$),

即

$$S=K-cK_1=0, K=cK_1.$$

最后，由

$$
\begin{aligned}
&\langle X_4, R(X_1, X_2)X_3\rangle=K(X_4, X_3, X_1, X_2)\\
&=cK_1(X_4, X_3, X_1, X_2)=c[\langle X_4, X_1\rangle\langle X_3, X_2\rangle\\
&-\langle X_3, X_1\rangle\langle X_2, X_4\rangle]=\langle X_4, c[\langle X_3, X_2\rangle X_1-\langle X_3, X_1\rangle X_2]\rangle
\end{aligned}
$$

可以推出(注意X_4是任取的)

$$R(X_1, X_2)X_3=c[\langle X_3, X_2\rangle X_1-\langle X_3, X_1\rangle X_2].\ \#$$

5. Riemann 正则子流形的 Riemann 联络

设($\tilde{M}$, $\langle\ ,\ \rangle$)是 C^∞ 的 n 维 Riemann 流形，M 是它的m维 Riemann 正则子流形，$\tilde{\nabla}$ 是M的 Riemann 联络。

定理 6 设 X, Y 是 M 上的 C^∞ 切向量场，$\nabla_X Y$ 和 $V(X, Y)$ 是 $\tilde{\nabla}_X Y$ 的唯一的切分量和法分量：

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + V(X, Y) \qquad \text{(Gauss 公式)} \qquad (8)$$

则(1°) ∇ 是 M 上的 Riemann 联络。

(2°) V 是M上的对称的向量值($\tilde{M}$上的)协变C^∞张量场。

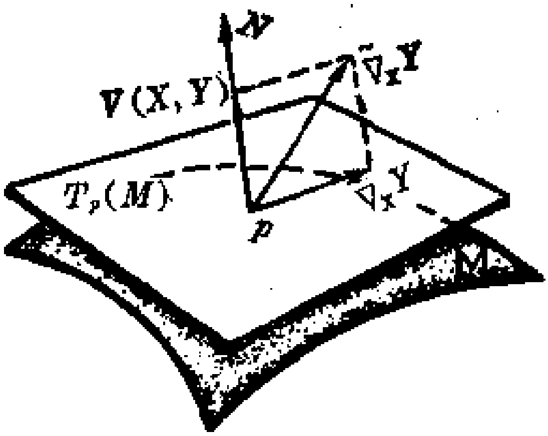


图 77

(3°) $\tilde{R}(X,Y)Z$ ($X,Y,Z \in \mathscr{X}(M)$)唯一分解为切分量 切$\tilde{R}(X,Y)Z$ 和法分量 法$\tilde{R}(X,Y)Z$，这里

$$\text{切}\ \tilde{R}(X,Y)Z = R(X,Y)Z +$$
$$\text{切}[\tilde{\nabla}_X V(Y,Z) - \tilde{\nabla}_Y V(X,Z)] \quad \text{(Gauss 曲率方程)} \qquad (9)$$

$$\text{法}\tilde{R}(X,Y)Z = V(X, \nabla_Y Z) - V(Y, \nabla_X Z) - V([X,Y], Z)$$
$$+\text{法}[\tilde{\nabla}_X V(Y,Z) - \tilde{\nabla}_Y V(X,Z)] \quad \text{(Codazzi-Mainardi 方程)} \quad (10)$$

证明 因为M是$\tilde{M}$的正则子流形，对任何$X \in \mathscr{X}(M)$，$p \in M$，可以选取p的关于$\tilde{M}$的特殊坐标系(U,φ)，$\{x^i\}$，使得在$U \cap M$中，$X = \sum_{i=1}^{m} a^i \frac{\partial}{\partial x^i}$，$a^i$是$x^1, \cdots, x^m$的$C^\infty$函数，然后，选取$p$的邻域$U_1 \subset U$和$f \in C^\infty(\tilde{M})$，使$f|_{U_1} = 1$，$f|_{\tilde{M}-U} = 0$。于是$\tilde{X} = f \cdot \left(\sum_{i=1}^{m} a^i \frac{\tilde{\partial}}{\partial x^i}\right)$可视作$\tilde{M}$的$C^\infty$向量场($\tilde{X}$ 在$\tilde{M}-U$中为0)，且$\tilde{X}|_{U_1 \cap M} =$

X.

为了证明 ∇ 和 V 在 M 上是 C^∞ 的，我们任取 $p\in M$，设 (U,p)，$\{x^i\}$ 为 p 的特殊坐标系，$\frac{\partial}{\partial x^1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^m}$ 和 $\frac{\tilde{\partial}}{\partial x^1},\cdots,\frac{\tilde{\partial}}{\partial x^n}$ 分别为 M 和 $\tilde{M}$ 上的坐标基向量场。显然，$\left.\frac{\tilde{\partial}}{\partial x^1}\right|_{U\cap M}=\frac{\partial}{\partial x^1},\cdots,\left.\frac{\tilde{\partial}}{\partial x^m}\right|_{U\cap M}=\frac{\partial}{\partial x^m}$. 由第二章 §8.1 引理 4 可以得到 U 上的 C^∞ 规范正交的基向量场 $\tilde{Z}_1,\cdots,\tilde{Z}_n$，使得 $\tilde{Z}_1|_{U\cap M}=Z_1,\cdots,\tilde{Z}_m|_{U\cap M}=Z_m$ 为 $U\cap M$ 上的相应的 C^∞ 规范正交的基向量场，而 $\tilde{Z}_{m+1}|_{U\cap M},\cdots,\tilde{Z}_n|_{U\cap M}$ 是 $U\cap M$ 上的 $T_q(M)(q\in U\cap M)$ 的法空间（与切空间正交的向量的全体）的 C^∞ 的规范正交的基向量场。令

$$X=\sum_{i=1}^m\lambda^iZ_i,Y=\sum_{j=1}^m\mu^jZ_j,$$

$$\tilde{\nabla}_{Z_i}Z_j=\sum_{k=1}^n\eta_{ij}^kZ_k,$$

则
$$\tilde{\nabla}_XY=\sum_{j=1}^m(X\mu^j)Z_j+\sum_{i,j=1}^m\sum_{k=1}^n\lambda^i\mu^j\eta_{ij}^kZ_k,$$

$$\nabla_XY=\sum_{k=1}^m\Big[(X\mu^k)+\sum_{i,j=1}^m\lambda^i\mu^j\eta_{ij}^k\Big]Z_k,$$

$$V(X,Y)=\sum_{k=m+1}^n\left(\sum_{i,j=1}^m\lambda^i\mu^j\eta_{ij}^k\right)Z_k.$$

从上面两式可看出 ∇_XY 和 $V(X,Y)$ 在 $U\cap M$ 上是 C^∞ 的。

下面我们来证明定理中的三个结论。

(1°)和(2°)的证明：由 $\nabla_{X_1+X_2}Y+V(X_1+X_2,Y)=\tilde{\nabla}_{X_1+X_2}Y$
$=\tilde{\nabla}_{X_1}Y+\tilde{\nabla}_{X_2}Y=(\nabla_{X_1}Y+\nabla_{X_2}Y)+[V(X_1,Y)+V(X_2,Y)]$,

$$\nabla_{fX}Y+V(fX,Y)=\tilde{\nabla}_{fX}Y=f\tilde{\nabla}_XY=f[\nabla_XY+V(X,Y)],$$
$$\nabla_X(Y_1+Y_2)+V(X,Y_1+Y_2)=\tilde{\nabla}_X(Y_1+Y_2)=\tilde{\nabla}_XY_1$$
$$+\tilde{\nabla}_XY_2=(\nabla_XY_1+\nabla_XY_2)+[V(X,Y_1)+V(X,Y_2)],$$
$$\nabla_X(fY)+V(X,fY)=\tilde{\nabla}_X(fY)=(Xf)Y+f\tilde{\nabla}_XY$$
$$=[(Xf)Y+f\nabla_XY]+fV(X,Y)$$

得到 ∇ 满足仿射联络的四个条件和 V 是向量值的协变张量场。又因为在 $U\cap M$ 上有

$$[X,Y]=\widetilde{[\tilde{X},\tilde{Y}]}=\tilde{\nabla}_{\tilde{X}}\tilde{Y}-\tilde{\nabla}_{\tilde{Y}}\tilde{X}=\tilde{\nabla}_XY-\tilde{\nabla}_YX$$
$$=(\nabla_XY-\nabla_YX)+[V(X,Y)-V(Y,X)]$$

(第一个等式留作习题),

因此, $V(X,Y)=V(Y,X)$(对称),并且

$$T(X,Y)=\nabla_XY-\nabla_YX-[X,Y]=0,$$
$$Z\langle X,Y\rangle=\tilde{Z}\langle\tilde{X},\tilde{Y}\rangle=\langle\tilde{\nabla}_Z\tilde{X},\tilde{Y}\rangle+\langle\tilde{X},\tilde{\nabla}_Z\tilde{Y}\rangle=\langle\tilde{\nabla}_ZX,Y\rangle$$
$$+\langle X,\tilde{\nabla}_ZY\rangle=\langle\nabla_ZX+\text{法}\,\tilde{\nabla}_ZX,Y\rangle+\langle X,\nabla_ZY+\text{法}\,\tilde{\nabla}_ZX\rangle$$
$$=\langle\nabla_ZX,Y\rangle+\langle X,\nabla_ZY\rangle,$$

即 ∇ 满足 Riemann 联络的条件(5°)和(6°),从而∇就是$(M,\langle,\rangle)$的 Riemann 联络(由定理 4 中的唯一性)。

(3°)由 $\tilde{R}(X,Y)Z=\tilde{\nabla}_X\tilde{\nabla}_YZ-\tilde{\nabla}_Y\tilde{\nabla}_XZ-\tilde{\nabla}_{[X,Y]}Z$

$$=\tilde{\nabla}_X(\nabla_YZ+V(Y,Z))-\tilde{\nabla}_Y(\nabla_XZ+V(X,Z))-(\nabla_{[X,Y]}Z$$
$$+V([X,Y],Z))$$
$$=\{\nabla_X\nabla_YZ+V(X,\nabla_YZ)+\tilde{\nabla}_XV(Y,Z)\}-\{\nabla_YV_XZ+V(Y,\nabla_XZ)$$
$$+\tilde{\nabla}_YV(X,Z)\}-\{\nabla_{[X,Y]}Z+V([X,Y],Z)\}=R(X,Y)Z$$
$$+\tilde{\nabla}_XV(Y,Z)-\tilde{\nabla}_YV(X,Z)+V(X,\nabla_YZ)-V(Y,\nabla_XZ)$$
$$-V([X,Y],Z)$$

推出

$$\text{切}\,\tilde{R}(X,Y)Z=R(X,Y)Z+\text{切}[\tilde{\nabla}_XV(Y,Z)-\tilde{\nabla}_YV(X,Z)],$$
$$\text{法}\,\tilde{R}(X,Y)Z=V(X,\nabla_YZ)-V(Y,\nabla_XZ)-V([X,Y],Z)+$$

法$[\tilde{\nabla}_X V(Y,Z)-\tilde{\nabla}_Y V(X,Z)]$. #

注 关于∇, $\tilde{\nabla}$和$[\ ,\ ]$运算的合理性主要根据引理 3 及 M 上的 C^∞向量场X可对应 $\tilde{M}$ 上的 C^∞ 向量场 $\tilde{X}$, 使 $\tilde{X}|_{U\cap M}=X$.

$(\tilde{M},\langle\ ,\ \rangle)$在 M 上诱导的度量张量称为 M 上的**第一基本形式**. 而 V 称为M的**第二基本形式**.

例 1 在定理 6 中, 如果 M 是 $\tilde{M}$ 的 $n-1$ 维正则子流形(超曲面), N 是 M上的局部 C^∞单位法向量场. 我们定义 Weingarten 映射:

$$LX=\tilde{\nabla}_X N,\ X\in T_p(M). \tag{11}$$

因为 $0=X\langle N,N\rangle=2\langle\tilde{\nabla}_X N,N\rangle$, 所以 $LX\in T_p(M)$. 容易看出 L 是切空间上的线性变换.

由于$\langle V(X,Y),\ N\rangle=\langle\tilde{\nabla}_X Y,N\rangle=X\langle Y,N\rangle-\langle Y,\tilde{\nabla}_X N\rangle$

$$=0-\langle Y,LX\rangle=-\langle LX,Y\rangle,$$

$$V(X,Y)=-\langle LX,Y\rangle N, \tag{12}$$

Gauss 公式成为

$$\tilde{\nabla}_X Y=\nabla_X Y-\langle LX,Y\rangle N. \tag{13}$$

同时还可以看出

$V(X,Y)=V(Y,X)\Longleftrightarrow\langle LX,Y\rangle=\langle X,LY\rangle$; 即 L 是自共轭的线性变换, 此外, 有

$$\tilde{\nabla}_X V(Y,Z)=-\tilde{\nabla}_X(\langle LY,Z\rangle N)=-X\langle LY,Z\rangle\cdot N$$

$$-\langle LY,Z\rangle LX,$$

$$-\tilde{\nabla}_Y V(X,Z)=\tilde{\nabla}_Y(\langle LX,Z\rangle N)=Y\langle LX,Z\rangle\cdot N+\langle LX,Z\rangle\cdot LY,$$

$$V(X,\nabla_Y Z)=-\langle LX,\nabla_Y Z\rangle N=\langle\nabla_Y LX,Z\rangle\cdot N-Y\langle LX,Z\rangle\cdot N,$$

$$-V(Y,\nabla_X Z)=\langle LY,\nabla_X Z\rangle N=-\langle\nabla_X LY,Z\rangle N+X\langle LY,Z\rangle\cdot N,$$

$$-V([X,Y],Z)=\langle L[X,Y],Z\rangle N.$$

于是, Gauss 曲率方程为

切 $\tilde{R}(X,Y)Z=R(X,Y)Z-[\langle LY,Z\rangle LX$

$$-\langle LX,Z\rangle LY].\tag{14}$$

Codazzi-Mainardi 方程为

$$法\ \tilde{R}(X,Y)Z=-\langle\nabla_X LY-\nabla_Y LX-L[X,Y],Z\rangle N.\tag{15}$$

如果 π 是 $T_p(M)$中的 2 维子空间，$R(\pi)$和 $\tilde{R}(\pi)$ 分别是 π 关于 M 和 $\tilde{M}$ 的截曲率，X和Y 是 π 的一个规范正交基，则

$$\begin{aligned}\tilde{R}(\pi)&=\langle X,\tilde{R}(X,Y)Y\rangle=\langle X,切\ \tilde{R}(X,Y)Y\rangle\\&=\langle X,R(X,Y)Y\rangle-\langle X,\langle LY,Y\rangle LX\rangle+\langle X,\langle LX,Y\rangle LY\rangle\\&=R(\pi)-[\langle LX,X\rangle\langle LY,Y\rangle-\langle LX,Y\rangle^2].\end{aligned}$$

即

$$\tilde{R}(\pi)=R(\pi)-[\langle LX,X\rangle\langle LY,Y\rangle-\langle LX,Y\rangle^2].\tag{16}$$

8.2 习　　题

1. 证明引理 1 中 $X|_U=0$的部分.

2. 证明 $\tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^{\gamma}=\sum_{i,j,k}\frac{\partial x^i}{\partial y^\alpha}\frac{\partial x^j}{\partial y^\beta}\frac{\partial y^\gamma}{\partial x^k}\Gamma_{ij}^k+\sum_i\frac{\partial^2 x^i}{\partial y^\alpha\partial y^\beta}\frac{\partial y^\gamma}{\partial x^i}$.

3. 证明引理 3 后的注和 T,R 的偏线性.

4. 通过定理 4 的(6)式验证∇满足仿射联络的四个条件.

5. 定理 4 的另一证明.

设 $\{x^i\}$和$\{y^i\}$为局部坐标系，

$$g_{ij}=\left\langle\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}\right\rangle,\quad\sum_j g_{ij}g^{jk}=\delta_i^k(即(g^{ik})是(g_{ij})的逆矩阵),$$

$$\tilde{g}_{ij}=\left\langle\frac{\partial}{\partial y^i},\frac{\partial}{\partial y^j}\right\rangle=\sum_{l,s}\frac{\partial x^l}{\partial y^i}\frac{\partial x^s}{\partial y^j}g_{ls},$$

$$\tilde{g}^{ij}=\sum_{l,s}\frac{\partial y^i}{\partial x^l}\frac{\partial y^j}{\partial x^s}g^{ls}\ ((\tilde{g}^{ik})是(\tilde{g}_{ij})的逆矩阵).$$

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^j}=\sum_k\Gamma_{ij}^k\frac{\partial}{\partial x^k},\quad\nabla_{\frac{\partial}{\partial y^i}}\frac{\partial}{\partial y^j}=\sum_k\tilde{\Gamma}_{ij}^k\frac{\partial}{\partial y^k}.$$

(1°) (唯一性)　由 $\frac{\partial g_{rj}}{\partial x^i}=\sum_l g_{lj}\Gamma_{ir}^l+\sum_l g_{rl}\Gamma_{ij}^l$ 推出

$$\Gamma_{ij}^k=\frac{1}{2}\sum_r g^{kr}\left(\frac{\partial g_{rj}}{\partial x^i}+\frac{\partial g_{ri}}{\partial x^j}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^r}\right).$$

(2°)（存在性） 设 $\Gamma_{ij}^k=\frac{1}{2}\sum_r g^{kr}\left(\frac{\partial g_{rj}}{\partial x^i}+\frac{\partial g_{ri}}{\partial x^j}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^r}\right)$,

$$\widetilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^\gamma=\frac{1}{2}\sum_s \widetilde{g}^{\gamma s}\left(\frac{\partial \widetilde{g}_{s\beta}}{\partial y^\alpha}+\frac{\partial \widetilde{g}_{s\alpha}}{\partial y^\beta}-\frac{\partial \widetilde{g}_{\alpha\beta}}{\partial y^s}\right),$$

则 $\Gamma_{ij}^k=\Gamma_{ji}^k$。

$$\widetilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^\gamma=\sum_{i,j,k}\frac{\partial x^i}{\partial y^\alpha}\frac{\partial y^j}{\partial y^\beta}\frac{\partial y^\gamma}{\partial x^k}\Gamma_{ij}^k+\sum_i\frac{\partial^2 x^i}{\partial y^\alpha\partial y^\beta}\frac{\partial y^\gamma}{\partial x^i}.$$

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}=\sum_l g_{il}\Gamma_{kj}^l+\sum_l g_{jl}\Gamma_{ki}^l.$$

6. 证明引理 7.

7. 证明定义 5 中的式子

$$\bar{K}(X,Y)=\bar{K}(aX+bY,\ cX+dY),\ ad-bc\neq 0.$$

8. 仿照例 1，对$(\widetilde{M},\langle\,,\rangle)$的 $n-k$ 维正则子流形 M 推导出相应的各公式。

9. 设$\{x^i\}$是 R^n 的通常的整体坐标，定义

$$g_{ij}=\left\langle\frac{\partial}{\partial x^i},\ \frac{\partial}{\partial x^j}\right\rangle=\delta_j^i,$$

$$\langle X,Y\rangle=\left\langle\sum_{i=1}^n\lambda^i\frac{\partial}{\partial x^i},\sum_{j=1}^n\mu^j\frac{\partial}{\partial x^j}\right\rangle=\sum_{i=1}^n\lambda^i\mu^i.$$

证明 (1°) $\Gamma_{ij}^k=0$.

(2°) 设 ∇ 为 Riemann 联络，则

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^j}=0.$$

$$\nabla_X Y=\sum_j (X\mu^j)\frac{\partial}{\partial x^j}=\sum_j\left(\sum_i\lambda^i\frac{\partial\mu^j}{\partial x^i}\right)\frac{\partial}{\partial x^j}$$

$$=\sum_j\frac{d\mu^j(\sigma(t))}{dt}\frac{\partial}{\partial x^j}\quad (\text{其中 } T_\sigma(t)=X).$$

(3°) 向量的平移方程为

$$\frac{dY^k}{dt}=0,\ k=1,\cdots,n.$$

即 $Y(t)=\sum_k Y^k\frac{\partial}{\partial x^k}$，$Y^k$ 是常数（画出几何图形）.

(4°) 测地线方程为

$$\frac{d^2x^k}{dt^2}=0$$

即 $x^k=a_k t+b_k$，作出几何解释.

(5°) 写出 T^i_{jk}，R^k_{lij}，ω^i，ω^i_j 和 Cartan 结构方程.

(6°) 写出挠张量场 T，曲率张量场 R，Riemann-Christoffel 曲率张量场 K 和截曲率.

10. 如果 $\widetilde{M}=R^n$，Riemann 度量如题 9 所述，写出本节最后一部分内容中的各公式.

11. 在例 1 中，设 $\{u^1,\cdots,u^{n-1}\}$ 是 M 的局部坐标系，

$$g_{ij}=\left\langle\frac{\partial}{\partial u^i},\ \frac{\partial}{\partial u^j}\right\rangle,L_{ij}=\left\langle L\frac{\partial}{\partial u^i},\ \frac{\partial}{\partial u^j}\right\rangle,$$

$$L\frac{\partial}{\partial u^i}=\widetilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial u^i}}N=\sum_{k=1}^{n-1}L^k_i\frac{\partial}{\partial u^k},\quad \sum_{j=1}^{n-1}g_{ij}g^{jk}=\delta^k_i.$$

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial u^i}}\frac{\partial}{\partial u^j}=\sum_{k=1}^{n-1}\Gamma^k_{ij}\frac{\partial}{\partial u^k}.$$

证明 (1°) $\widetilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial u^i}}\frac{\partial}{\partial u^j}=\sum_{k=1}^{n-1}\Gamma^k_{ij}\frac{\partial}{\partial u^k}-L_{ij}N.$

(2°) $L_{ij}=\sum_{k=1}^{n-1}L^k_i g_{kj}$，$L^k_i=\sum_{j=1}^{n-1}L_{ij}g^{jk}$.

(3°) $L_{ij}=L_{ji}$. $L^j_i=L^i_j$?

(4°) 在 $p\in M$ 处，线性变换 $L:T_p(M)\to T_p(M)$ 的特征值 $K_1,\cdots,K_{n-1}$ 都是实数.

(5°) 我们称 $K=K_1\cdot K_2\cdots K_{n-1}$ 为 M 在 p 点处的 Gauss 曲率，称

$$H=\frac{K_1+\cdots+K_{n-1}}{n-1}$$

为 M 在 p 点处的平均曲率.

则 $$K=\det((L_{ij})\cdot(g^{jk}))=\det(L_{ij})/\det(g_{jk}).$$

$$H=\mathrm{Tr}((L_{ij})\cdot(g^{jk}))/n-1=\sum_{i,j=1}^{n-1}L_{ij}g^{ji}/n-1.$$

(6°) 设 $\widetilde{M}=R^n$ 如题 10 所述，则

Gauss 曲率方程 $\Longleftrightarrow \dfrac{\partial\Gamma^l_{jk}}{\partial u^i}-\dfrac{\partial\Gamma^l_{ik}}{\partial u^j}+\sum\limits_{s=1}^{n-1}(\Gamma^s_{jk}\Gamma^l_{is}-\Gamma^s_{ik}\Gamma^l_{js})$

$$=L_{jk}L^l_i-L_{ik}L^l_j,$$

或 $R^l_{kij}=L_{jk}L^l_i-L_{ik}L^l_j,i,j,k,l=1,\cdots,n-1.$

Codazzi-Mainardi 方程 $\Longleftrightarrow \dfrac{\partial L_{jk}}{\partial u^i}-\dfrac{\partial L_{ik}}{\partial u^j}-\sum\limits_{l=1}^{n-1}\Gamma^l_{ik}L_{jl}$

$$+\sum_l\Gamma^l_{jk}L_{il}=0\qquad i,j,k=1,\cdots,n.$$

$$\det\begin{pmatrix}L_{ir} & L_{ik}\\ L_{jr} & L_{jk}\end{pmatrix}=\sum_{l=1}^{n-1}g_{lr}R^l_{kij}=\sum_{l=1}^{n-1}g_{lr}\left[\frac{\partial\Gamma^l_{jk}}{\partial u^i}-\frac{\partial\Gamma^l_{ik}}{\partial u^j}\right.$$

$$\left.+\sum_{s=1}^{n-1}(\Gamma^s_{jk}\Gamma^l_{is}-\Gamma^s_{ik}\Gamma^l_{js})\right].$$

$$\det\begin{pmatrix}L^l_i & L^l_j\\ L^r_i & L^r_j\end{pmatrix}=\sum_{k=1}^{n-1}R^l_{kij}g^{kr}=\sum_{k=1}^{n-1}g^{kr}\left[\frac{\partial\Gamma^l_{jk}}{\partial u^i}-\frac{\partial\Gamma^l_{ik}}{\partial u^j}\right.$$

$$\left.+\sum_{s=1}^{n-1}(\Gamma^s_{jk}\Gamma^l_{is}-\Gamma^s_{ik}\Gamma^l_{js})\right].$$

(7°) 设 $\widetilde{M}=R^n$，n 为奇数．则有

Gauss 定理. M 的 Gauss 曲率 K 由 M 的第一基本形式完全确定，而与 M 的第二基本形式无关.

12. 设 $\widetilde{M}=R^3$,则

(1°) M 的 Gauss 曲率 $K=R\left(\widehat{\dfrac{\partial}{\partial u^1}\ \dfrac{\partial}{\partial u^2}}\right)$（截曲率）.

(2°) M: $(x^1(u^1,u^2),\ x^2(u^1,u^2),\ x^3(u^1,u^2))$,

$$\frac{\partial}{\partial u^1}=\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial x^i}{\partial u^1}\frac{\partial}{\partial x^i},\quad \frac{\partial}{\partial u^2}=\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial x^i}{\partial u^2}\frac{\partial}{\partial u^i},$$

$$\tilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial u^1}}\frac{\partial}{\partial u^1}=\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2 x^i}{\partial u^1\partial u^1}\frac{\partial}{\partial x^i},\quad \tilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial u^1}}\frac{\partial}{\partial u^2}=\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2 x^i}{\partial u^1\partial u^2}\frac{\partial}{\partial x^i},$$

$$\tilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial u^2}}\frac{\partial}{\partial u^1}=\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2 x^i}{\partial u^2\partial u^1}\frac{\partial}{\partial x^i},\quad \tilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial u^2}}\frac{\partial}{\partial u^2}=\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2 x^i}{\partial u^2\partial u^2}\frac{\partial}{\partial x^i},$$

$$N=\frac{\frac{\partial}{\partial u^1}\times\frac{\partial}{\partial u^2}}{\left|\frac{\partial}{\partial u^1}\times\frac{\partial}{\partial u^2}\right|},\quad g_{ij}=\left\langle\frac{\partial}{\partial u^i},\frac{\partial}{\partial u^j}\right\rangle,$$

$$L_{ij}=\left\langle L\frac{\partial}{\partial u^i},\frac{\partial}{\partial u^j}\right\rangle=\left\langle\tilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial u^i}}N,\frac{\partial}{\partial u^j}\right\rangle$$

$$=-\left\langle N,\tilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial u^i}}\frac{\partial}{\partial u^j}\right\rangle.$$

$$K=\det(L_{ij})/\det(g_{ij}),\quad H=\frac{\sum_{i,j=1}^{2}L_{ij}g^{ij}}{2}.$$

计算下列 2 维曲面的 Gauss 曲率 K 和平均曲率 H：

(1°) 正螺旋面$(u\cos v,\ u\sin v,\ av+b)(a>0)$，$v=$常数(直线)，$u=$常数(螺旋线)，则

$$K=-\frac{a^2}{(u^2+a^2)^2},\quad H=0.$$

(2°) 平面$(u,v,0)$，$K=0$，$H=0$。

(3°) 柱面$(r\cos\theta,\ r\sin\theta,\ z)$，$K=0$，$H=\frac{1}{2r}$.

(4°) 球面$(r\sin\theta\cos\varphi,\ r\sin\theta\sin\varphi,\ r\cos\theta)$，

$$K=\frac{1}{r^2},\quad H=\frac{1}{r}.$$

(5°) 环面$((b+a\cos\theta)\cos\varphi,\ (b+a\cos\theta)\sin\varphi,\ a\sin\theta)\ (b>a>0)$，

$$K=\frac{\cos\theta}{a(b+a\cos\theta)},\quad H=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{\cos\theta}{b+a\cos\theta}\right).$$

(6°) 旋转曲面$(f(u)\cos v,\ f(u)\sin v,\ g(u))$，$f$ 和 g 二阶连续可导，

且

$$f'^2+g'^2\neq 0,\ f(u)\neq 0.$$

$$K=\frac{g'(f'g''-g'f'')}{f(f'^2+g'^2)^2},\quad H=-\frac{g'(f'^2+g'^2)+f(f'g''-f''g')}{2f(f'^2+g'^2)^{3/2}}.$$

13．$\widetilde{M}=R^n$，$M=\{x\in R^n|\|x\|=r\}$，则

$$LX=\widetilde{\nabla}_X N=\widetilde{\nabla}_X\left(\sum_{i=1}^n\frac{x^i}{r}\frac{\partial}{\partial x^i}\right)=\frac{1}{r}\sum_{i=1}^n(Xx^i)\frac{\partial}{\partial x^i}=\frac{1}{r}X.$$

$$K=\frac{1}{r^{n-1}},\quad H=\frac{1}{r}.$$

14．$\widetilde{M}=R^n$，$M=\{(x^1,\cdots,x^n)\in R^n|(x^1)^2+\cdots+(x^{n-1})^2=r^2\}$，则

$$K=0,\quad H=\frac{n-2}{(n-1)r}.$$

15．设 σ 是 C^∞ 流形 M（以联络 ∇）的一条测地线，它的参数为 t．如果改变参数为 s，使 $t=f(s)(f'(s)\neq 0)$，f 为 C^∞ 函数，则新曲线 $\sigma(f(s))$ 是测地线$\Longleftrightarrow$

$$f(s)=as+b,\ a\neq 0.$$

16．在引理 5 中，直接证明：C^∞ 流形 M 上的一个满足条件（6°）的联络 $\nabla\Longleftrightarrow$平行移动下保持内积不变．

提示：($\Rightarrow$) 由 $\frac{d}{dt}\langle X(t),\ Y(t)\rangle=\langle\nabla_{T(t)}X(t),\ Y(t)\rangle+\langle X(t),\ \nabla_{T(t)}Y(t)\rangle$推出．

($\Leftarrow$) 设 $P_i\ (i=1,\cdots,n)$ 为沿 C^∞ 曲线 $\sigma(t)$ 的平行单位正交基向量场（即$\nabla_{T_\sigma(t)}P_i=0$，$\langle P_i,\ P_j\rangle=\delta_j^i$）．令

$$X=\sum_{i=1}^n x^iP_i,\quad Y=\sum_{j=1}^n y^jP_j.$$

17．设 ∇为 C^∞ 流形$(M,\mathscr{D})$上的仿射联络，则

$\overline{\nabla}=C+\nabla$（即 $\overline{\nabla}_XY=C(X,Y)+\nabla_XY$）为仿射联络$\Longleftrightarrow C=\overline{\nabla}-\nabla$ 为 M 上的 C^∞ 的二阶协变向量值张量场（称为 $\overline{\nabla}$ 和 ∇ 的差张量）．

注意：举例说明 ∇ 不是二阶协变向量值张量场．

18．设 ∇ 和 $\overline{\nabla}$ 为 C^∞ 流形$(M,\mathscr{D})$的仿射联络，C 为差张量．令

$$S(X,Y)=\frac{1}{2}[C(X,Y)+C(Y,X)]\quad（对称）$$

$$A(X,Y)=\frac{1}{2}[C(X,Y)-C(Y,X)] \quad (反对称)$$

证明 (1°) $2A(X,Y)=\bar{T}(X,Y)-T(X,Y)$

(其中 $\bar{T}$ 和 T 分别是关于 $\bar{\nabla}$ 和 ∇ 的挠张量)。

(2°) 联络 ∇ 和 $\bar{\nabla}$ 有相同的测地线(参数相同)

$\Longleftrightarrow$ 对所有的 X, $C(X,X)=0$。

$\Longleftrightarrow S=0$。

$\Longleftrightarrow C=A$。

(3°) $\bar{\nabla}=\nabla \Longleftrightarrow \bar{T}=T$ 以及它们有相同的测地线(参数相同)。

19. 设 ∇ 为 C^{∞} 流形 $(M,\mathscr{D})$ 的仿射联络，则存在唯一的联络 $\bar{\nabla}\left(\bar{\nabla}_X Y=\nabla_X Y-\frac{1}{2}T(X,Y)\right)$，它和 ∇ 有相同的测地线(参数相同)，且挠张量 $\bar{T}=0$。

参 考 文 献

[1] Whitney, H., Geometric Integration Theory. Princeton, N. J., Princeton University Press, 1957.

[2] Whitney, H., "A function not constant on a connected set of critical points," Duke Math. J., Vol. 1 (1935) pp. 514—517.

[3] M. Kervaire, A manifold which does not admit any differentiable structure, Comm. Math. Helv. 34, 257—270 (1960).

[4] Shlomo Sternberg, "Lectures on Differential Geometry", Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J. 1964.

[5] P. J. 希尔顿, S. 瓦理著，江泽涵等译"同调论"，上海科学技术出版社(1963).

[6] 岩堀长庆著，孙泽瀛译"李群论"，上海科学技术出版社(1962).

[7] B. L. 范德瓦尔登著，丁石孙等译"代数学"，科学出版社(1963).